

Options Barrières : Couverture statique et risque de modèle

JOHANN RIVALLAND ET THIBAUT TIROLIEN

Groupe de Travail sous la direction de Franck Viollet

Direction des Risques de Marché et de Modèle
HSBC-CCF

30 mai 2003

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 5 |
| 2 | Contexte et problématiques | 6 |
| 2.1 | Généralités | 6 |
| 2.1.1 | Définition | 6 |
| 2.1.2 | Intérêt | 7 |
| 2.1.3 | Relations de parité | 8 |
| 2.2 | Techniques de valorisation | 8 |
| 2.2.1 | Formulation risque-neutre | 9 |
| 2.2.2 | Valorisation par méthode de Monte-Carlo | 10 |
| 2.2.3 | Approche Equation aux Dérivées Partielles | 11 |
| 2.3 | Méthodes de couverture | 12 |
| 2.3.1 | Couverture dynamique | 12 |
| 2.3.2 | Couverture statique | 13 |
| 2.4 | Mesures de performance | 14 |
| 2.4.1 | Considérations moyenne-variance | 14 |
| 2.4.2 | Indicateur de performance | 15 |
| 3 | Couverture statique | 16 |
| 3.1 | Modèle de Black et Scholes | 16 |
| 3.1.1 | Description | 16 |
| 3.1.2 | Intérêt du modèle | 17 |
| 3.2 | Stratégie <i>Stop-Loss Start-Gain</i> | 18 |
| 3.2.1 | Intuition et principe | 18 |
| 3.2.2 | Résolution du paradoxe | 19 |
| 3.3 | Approche théorique par le principe de réflexion | 20 |
| 3.3.1 | Introduction de la fonction de paiement <i>ajustée</i> | 20 |
| 3.3.2 | Adaptation pratique | 21 |
| 3.3.3 | Performances de la couverture | 22 |
| 3.4 | Réplication à la barrière | 23 |
| 3.4.1 | Principe de la réplication à la frontière | 23 |
| 3.4.2 | Application au monde réel | 24 |
| 3.4.3 | Performances de la couverture | 25 |
| 3.5 | Minimisation de l'erreur quadratique | 26 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.5.1 | Principe | 26 |
| 3.5.2 | Propriétés intéressantes | 27 |
| 3.5.3 | Performances de la couverture | 28 |
| 4 | Risque de modèle | 29 |
| 4.1 | Présentation des autres modèles | 29 |
| 4.1.1 | Le modèle de Dupire | 29 |
| 4.1.2 | Le modèle de Kou | 30 |
| 4.2 | Tests de robustesse | 33 |
| 4.2.1 | Changement de méthode de couverture | 33 |
| 4.2.2 | Changement de modèle | 35 |
| 4.3 | Extension | 37 |
| 4.3.1 | Principe | 37 |
| 4.3.2 | Algorithme | 37 |
| 4.3.3 | Résultats | 38 |
| 5 | Conclusion | 39 |
| A | Couvertures dynamiques en delta-neutre | 40 |
| A.1 | Paramètres des formules fermées | 40 |
| A.2 | Graphes des sensibilités <i>deltas</i> | 42 |
| A.3 | Performances des couvertures | 44 |
| B | Couvertures statiques | 46 |
| B.1 | Stratégie <i>Stop-Loss Start-Gain</i> | 46 |
| B.2 | Fonction de paiement <i>ajustée</i> | 47 |
| B.3 | Réplication de la barrière dans un monde binomial | 49 |
| B.4 | Test de la couverture de réplication à la barrière | 53 |
| B.5 | Test de la couverture par minimisation de l'erreur quadratique | 56 |
| C | Tests de robustesse | 58 |
| C.1 | Modèles de Dupire et de Kou | 58 |
| C.2 | Comparaison des méthodes | 63 |
| C.3 | Robustesse au changement de modèle | 64 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Principe du choix des options | 24 |
| 4.1 | Effet de <i>smile</i> sur les données de marché | 30 |
| 4.2 | Densité de probabilité de l'erreur de répliation | 38 |
| A.1 | Delta du Call standard | 42 |
| A.2 | Delta du Call Up-and-Out | 43 |
| A.3 | Couverture dynamique du Call standard | 44 |
| A.4 | Couverture dynamique du Call Up-and-Out | 45 |
| A.5 | Comparaison des deux couvertures | 45 |
| B.1 | Fonction de paiement <i>ajustée</i> | 47 |
| B.2 | Fonction de densité de l'erreur | 48 |
| B.3 | Méthode binomiale | 49 |
| B.4 | Arbre du cours | 50 |
| B.5 | Arbre de la barrière à couvrir | 50 |
| B.6 | Arbre de la vanille répliquant le pay-off à maturité | 51 |
| B.7 | Annulation de la barrière à $T = 4$ | 51 |
| B.8 | Annulation de la barrière à $T = 3$ | 52 |
| B.9 | Impact du nombre d'option sur la qualité de la couverture | 53 |
| B.10 | Valeur à la barrière | 54 |
| B.11 | Fonction de densité de l'erreur <i>réplication à la barrière</i> | 55 |
| B.12 | Fonction de densité de l'erreur <i>moindres carrés</i> | 57 |
| C.1 | Exemple de cours dans le modèle de Dupire | 58 |
| C.2 | Exemple de nappe de volatilité dans le modèle de Dupire | 59 |
| C.3 | Exemple de cours dans le modèle de Kou | 60 |
| C.4 | Effet d' <i>overshoot</i> | 60 |
| C.5 | Exemple de nappe de volatilité dans le modèle de Kou | 61 |
| C.6 | Convergence du pricing par Monte Carlo pour une option vanille | 61 |
| C.7 | Convergence du pricing par Monte Carlo pour une option barrière | 62 |
| C.8 | Comparaison des fonctions de densité | 63 |
| C.9 | Couverture <i>Black-Scholes</i> dans <i>Dupire</i> | 64 |
| C.10 | Sensibilité du prix au paramètre δ | 65 |
| C.11 | Couverture <i>Black-Scholes</i> dans <i>Kou</i> , version symétrique | 66 |

| | |
|--|----|
| C.12 Couverture <i>Black-Scholes</i> dans <i>Kou</i> , version asymétrique | 66 |
| C.13 Couverture <i>GS Kou symétrique</i> dans <i>Kou symétrique</i> | 67 |
| C.14 Couverture <i>GS Kou symétrique</i> dans <i>Kou asymétrique</i> | 68 |

Chapitre 1

Introduction

Les produits financiers disponibles sur les marchés se sont particulièrement complexifiés au cours des dix dernières années: à la suite des produits dérivés de première génération introduits dans les années 1970, et sur lesquels portent les célèbres travaux de Black et Scholes, les produits exotiques de deuxième génération ont fait leur apparition au début des années 1990.

Parmi eux, les options barrières dont la caractéristique essentielle réside dans la dépendance du flux terminal de l'option en la trajectoire complète du cours de l'action sous-jacente. Nous allons bien entendu expliquer précisément le fonctionnement de ces options et les différentes techniques de valorisation pouvant être mises en oeuvre.

Les options barrières soulèvent par contre des problèmes du point de vue de leur couverture: comme nous allons le voir dans une première partie, les méthodes classiques de couverture en *delta-neutre* se révèlent particulièrement inadaptées dans ce contexte. Les travaux actuels des équipes de recherche se focalisent sur l'efficacité d'une couverture statique des options barrières, pour laquelle il n'y a pas de transaction entre la constitution du portefeuille et le premier passage de la barrière. Au sein de ce Groupe de Travail, nous allons dans une seconde partie nous attacher à présenter quelques méthodes qui nous paraissent dignes d'intérêt dans une optique d'application pratique.

Dans un troisième temps, nous étudierons la robustesse des méthodes retenues à un changement de spécification quant à la dynamique suivie par le cours du sous-jacent. L'introduction d'un indicateur de performance nous permettra de comparer de façon synthétique les différentes couvertures testées.

Chapitre 2

Contexte et problématiques

2.1 Généralités

2.1.1 Définition

Une option barrière est un produit dérivé sur un actif sous-jacent (S_t) pour lequel le versement à l'échéance T de la fonction de paiement $\varphi(S_t)$ dépend du fait que le sous-jacent a franchi ou non, vers le haut ou vers le bas, durant la durée de vie du contrat $[0, T]$, une barrière H donnée.

La fonction de paiement d'une option européenne standard est basée sur le prix de l'actif sous-jacent à la maturité T . Une option standard est ainsi dite *path-independent* dans la mesure où peu importe la trajectoire qu'a suivie le cours du sous-jacent durant la vie de l'option.

Les options barrières sont *path-dependent* puisque leur fonction de paiement dépend du chemin suivi par le cours du sous-jacent durant la vie de l'option.

Les options barrières les plus courantes sont les *knock-out*, options qui expirent automatiquement lorsque le sous-jacent franchit la barrière, et les *knock-in*, options qui au contraire ne sont activées que si le sous-jacent franchit au moins une fois la barrière avant l'échéance.

Cependant, il existe aussi des options à doubles barrières qui peuvent être toutes les deux activantes, toutes les deux desactivantes, ou encore l'une activante et l'autre desactivante.

Par ailleurs, ces options s'appellent des calls, des puts, des options binaires, ... selon le choix de la fonction φ . Ainsi, par exemple,

- une option DIP (*down-and-in put*) de prix d'exercice K , d'échéance T et de barrière H , est le droit de vendre le sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci passe au moins une fois en dessous de la valeur H avant expiration du contrat;

- une option UOC (*up-and-out call*) de prix d'exercice K , d'échéance T et de barrière H , est le droit d'acheter le sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci ne dépasse jamais la valeur H avant expiration du contrat.

Il convient de noter quelques particularités liées aux options barrières:

- Le contrat consent parfois un *rebate*, payé en Cash, lorsque l'option est de type *out*. L'utilisateur reçoit une prime de compensation si l'option est désactivée. En contrepartie, la prime initiale versée par l'utilisateur est plus élevée.
- Les options barrières sont seulement négociées de gré à gré (*OTC*).
- Comme pour les options asiatiques, dont la fonction de paiement est basée sur le calcul d'une moyenne, une fréquence de contrôle spécifique à quelle fréquence on constate un éventuel franchissement de la barrière par le cours du sous-jacent. Cette constatation a généralement lieu en continu, mais elle peut également être faite heure par heure, quotidiennement,...

2.1.2 Intérêt

La prime d'une option barrière est plus faible que celle d'une option standard, puisque l'option aura de la valeur au sein d'un ensemble de trajectoires de cours plus restreint que pour l'option standard de même type.

Le détenteur d'une option barrière perd une partie de la valeur traditionnelle de l'option et cette option s'échange ainsi à un prix plus faible.

Le vendeur de l'option barrière diminue quant à lui son exposition globale au risque, en comparaison avec une option standard.

Le faible prix des options barrières en fait l'une des plus populaires au sein du groupe des options exotiques. Elles offrent la possibilité aux spéculateurs de disposer d'un effet de levier plus important pour un même montant investi.

En voici deux exemples d'utilisation:

1. Une banque peut souhaiter acheter un call à la monnaie sur le Nikkei de maturité 9 mois, avec un prix d'exercice de 17000 et une barrière désactivante à 16000. La banque a intérêt à agir de cette façon si elle pense que si le Nikkei franchit la barre de 16000, alors c'est nécessairement le signe d'une phase descendante et il ne remontera probablement pas au-dessus de 17000. Par contre, si l'indice Nikkei descend en dessous de 16000 pendant la période de 9 mois, la banque ne pourra plus tirer profit d'une hausse ultérieure dans la mesure où le call aura été désactivé.
2. Une compagnie aérienne s'inquiète du fait que les événements au Moyen-Orient puissent conduire à une forte hausse du prix du carburant. Un Up-and-In call permettrait à cette compagnie d'acheter son pétrole brut dans le futur à un prix déterminé aujourd'hui. Le prix de cette option barrière étant beaucoup moins élevé que celui d'un call standard avec la

même échéance et le même prix d'exercice, cette stratégie de couverture reviendrait moins chère à la compagnie, compte-tenu de ses anticipations.

De façon générale, les options barrières permettent aux participants du marché de réaliser sur mesure leurs stratégies de trading en fonction de leurs opinions personnelles sur les tendances du marché.

2.1.3 Relations de parité

La relation de parité Call-Put pour les options standard s'écrit ¹:

$$C_t - P_t = S_t - K \exp(-r(T - t))$$

où C_t est le prix à la date t du Call de prix d'exercice K , de maturité T , P_t est le prix à la date t du Put de mêmes caractéristiques, et S_t est le prix de l'actif sous-jacent à la date t .

Cette relation simple résiste mal au passage aux options barrières puisque la décomposition $(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$ doit être multipliée ici par une fonction indicatrice du type $1_{\max_{t \in [0, T]} S_t < H}$, où H est la valeur de la barrière: la fonction de paiement $S_T \cdot 1_{\max_{t \in [0, T]} S_t < H}$ ne correspond à aucun produit financier standard.

Par contre, il existe une relation liant les options barrières de type *out* à celles de type *in*. En effet, les indicatrices de deux événements contraires somment à un: $1_{\max_{t \in [0, T]} S_t < H} + 1_{\max_{t \in [0, T]} S_t \geq H} = 1$, en s'intéressant par exemple au maximum du cours sur la durée de vie de l'option. On peut multiplier cette expression par une fonction de paiement $\varphi(S_T)$ quelconque $((S_T - K)_+, (K - S_T)_+, \dots)$.

On obtient ainsi, avec des notations évidentes:

$$\begin{cases} UIC_t + UOC_t = C_t, \forall t \in [0, T] \\ DIC_t + DOC_t = C_t, \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

et ces relations se traduisent de façon équivalente pour les puts.

2.2 Techniques de valorisation

Dans la suite de notre étude, nous allons nous concentrer sur un type d'options barrières particulier, le *Call Up-and-Out* afin de dégager clairement les grandes problématiques et dans le souci de ne pas déstabiliser le lecteur. La plupart des résultats se transcrivent sans difficulté majeure aux autres types d'options barrières.

1. Cette relation est valable uniquement en l'absence de dividendes.

2.2.1 Formulation risque-neutre

Le cadre théorique de la finance repose sur l'hypothèse essentielle d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage (AOA), dont découle l'existence d'une probabilité \mathbb{Q} , dite probabilité risque-neutre, sous-laquelle les actifs réactualisés, écrits dans le numéraire Cash, sont des martingales.

On prouve alors que le prix π_t à la date t de n'importe quel produit financier, dont la fonction de paiement φ est \mathcal{F}_T -mesurable, est donné par la formule suivante:

$$\pi_t = E^{\mathbb{Q}}[\exp(-r(T-t)) \varphi / \mathcal{F}_t]$$

où r est le rendement, supposé constant, de l'actif sans risque, autrement dit le Cash.

Cette formule générale est indépendante du modèle spécifié pour le cours du sous-jacent.

On s'intéresse plus particulièrement ici aux deux options suivantes:

- le Call standard, de prix d'exercice K et de fonction de paiement $\varphi = (S_T - K)_+$,
- le Call Up-and-Out, de prix d'exercice K , de barrière H et de fonction de paiement $\varphi = (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\max_{t \in [0, T]} S_t < H}$.

Dans le cas de base où on suppose que le cours de l'actif sous-jacent suit un modèle de diffusion de type Black et Scholes, $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$, W_t étant un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{Q} , on peut montrer que le prix du Call standard s'écrit:

$$C_t = \mathcal{N}(d_1)S_t - \mathcal{N}(d_0)K \exp(-r(T-t))$$

où la fonction \mathcal{N} représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et où les expressions de d_1 et d_0 sont données dans l'annexe A.1.

Le prix d'un Call Up-and-Out à la date t s'écrit quant à lui:

$$\begin{aligned} UOC_t = & \\ & \{\mathcal{N}(d_1) - \mathcal{N}(d_3) - \alpha'(\mathcal{N}(d_6) - \mathcal{N}(d_8))\}S_t \\ & - \{\mathcal{N}(d_2) - \mathcal{N}(d_4) - \alpha(\mathcal{N}(d_5) - \mathcal{N}(d_7))\} \exp(-r(T-t))K \end{aligned}$$

où les expressions précises des d_i sont données dans l'annexe A.1.

Application numérique: $r = 0.05, \sigma = 0.30, T = 1$.

Pour un cours initial de $S_0 = 100$, le prix du Call standard de prix d'exercice $K = 100$ est $C_0 = 14.231$.

Le prix du Call Up-and-Out dont la barrière vaut $H = 130$ est $UOC_0 = 1.503$.

Mais les formules fermées reposent sur le modèle de Black et Scholes, alors que les options barrières peuvent être valorisées en toute généralité pour des dynamiques différentes par des méthodes de Monte Carlo.

2.2.2 Valorisation par méthode de Monte-Carlo

Principe

Nous cherchons à évaluer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire réelle X dont la variance $\text{var}(X)$ est finie. Pour cela, nous simulons des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$, des copies indépendantes de X . On en déduit:

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} X_i \simeq E(X)$$

pour N assez grand, puisque cette moyenne empirique converge presque sûrement vers $E(X)$ d'après la loi des grands nombres.

L'erreur d'approximation moyenne est contrôlée par le théorème de la limite centrale. On retiendra la règle heuristique suivante: pour N grand, avec probabilité 95%, on a:

$$E(X) \in \left[\bar{X}_N - 1.96 \sqrt{\frac{\text{var}(X)}{N}}, \bar{X}_N + 1.96 \sqrt{\frac{\text{var}(X)}{N}} \right]$$

où la variance de X peut être estimée par des estimateurs classiques.

Application

Dans le modèle de Black et Scholes, on a:

$$S_T = S_t \exp\{(r - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(W(T) - W(t))\}$$

où $W(T) - W(t)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, T - t)$.

Pour simuler le flux en T d'un Call standard, il suffit donc de simuler une loi normale. Par contre, pour le Call Up-and-Out, il faut également savoir si le cours du sous-jacent a touché, ou pas, la barrière H entre t et T .

Une première méthode consiste à discrétiser le mouvement brownien géométrique par une méthode d'Euler, en introduisant une subdivision de M points de l'intervalle en question, et en estimant le maximum du cours sur la durée de vie de l'option par $\max_{m \in [0, M]} S_m$. Cependant, il est immédiat qu'en procédant de la sorte, on sous-estime le vrai maximum, donc on surestime le prix du Call Up-and-Out.

Une autre méthode, non-biaisée celle-ci, consiste à utiliser le principe du pont brownien [2]: on simule dans un premier temps S_T à partir de S_t , puis connaissant le point de départ et le point d'arrivée du brownien géométrique, on simule le maximum entre ces deux points par la formule:

$$M_{t,T} = \exp \left[\frac{1}{2} (\log(S_t) + \log(S_T) + \sqrt{(\log(S_t) + \log(S_T))^2 - 2\sigma^2(T-t)\log(U)} \right]$$

où U est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

Les résultats obtenus avec la deuxième méthode sont présentés dans le tableau suivant:

| nombre de simulations | prix | intervalle de confiance | |
|-----------------------|-------|-------------------------|------------|
| | | borne inf. | borne sup. |
| 1 000 | 1.372 | 1.086 | 1.657 |
| 10 000 | 1.541 | 1.433 | 1.649 |
| 100 000 | 1.523 | 1.487 | 1.559 |
| 1 000 000 | 1.498 | 1.488 | 1.508 |
| 10 000 000 | 1.503 | 1.501 | 1.505 |

On rappelle que le prix théorique obtenu à partir de la formule fermée est de 1.503. On obtient donc une très bonne approximation du prix du Call Up-and-Out pour 10 millions de simulations.

Cette méthode peut être encore optimisée en simulant successivement la fonction de paiement du cours et la probabilité de non-franchissement de la barrière qui lui est associée: l'espérance actualisée du produit de ces deux valeurs redonne le prix de l'option barrière.

2.2.3 Approche Equation aux Dérivées Partielles

Même si la valorisation de tout produit financier peut se faire à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo, le temps de calcul nécessaire afin d'obtenir une convergence suffisante du prix est parfois rédhibitoire en comparaison avec l'utilisation d'autres méthodes.

Ainsi, en pratique, un certain nombre d'options exotiques sont valorisées par des méthodes basées sur la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Les options barrières ne dérogent pas à ce contexte, et en fonction de la dynamique proposée pour l'évolution du cours du sous-jacent, on cherchera systématiquement l'équation satisfaite par le prix de l'option et les conditions au bord nécessaires à sa résolution. L'équation obtenue n'est en général pas soluble analytiquement, mais les méthodes numériques basées sur les différences finies (schéma de Crank-Nicholson en temps et centré en espace) permettent parfois de gagner en temps de calcul pour une précision donnée.

Dans le cas de base où on suppose que le cours de l'actif sous-jacent suit un modèle de diffusion de type Black et Scholes, $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$, W_t étant un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{Q} , on peut montrer que:

$$C_t = A_t \Psi(S_t, t)$$

où $A_t = 1_{\max_{t \in [0, T]} S_t < H}$ est un processus décroissant, et où la fonction Ψ vérifie sur l'intervalle $[0, T] \times [0, H[$ l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) + \sigma^2 \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, x) - r\Psi(t, x) = 0$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{cases} \Psi(T, x) = (x - K)_+, \forall x \in [0, H[\\ \Psi(t, H) = 0, \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Nous n'avons pas ici testé ces méthodes dans la mesure où le temps de calcul nécessaire à nos opérations restait raisonnable en utilisant des méthodes de Monte-Carlo.

2.3 Méthodes de couverture

Nous nous sommes jusque là focalisés sur les méthodes de valorisation des options barrières; mais la plus grosse difficulté posée par ce type d'options exotiques réside non pas dans leur pricing mais dans leur couverture².

2.3.1 Couverture dynamique

Les produits dérivés sont en général gérés sur les marchés par une couverture en *delta-neutre*. Cette couverture dynamique, réajustée régulièrement au cours de la vie de l'option, vise à constituer un portefeuille autofinçant comprenant des actions du sous-jacent et du Cash, et de calculer les quantités adéquates à investir dans chacun de ces actifs afin de rendre le portefeuille global insensible aux variations au premier ordre du cours du sous-jacent.

Le caractère autofinçant du portefeuille de couverture vient du fait que l'on investit dans ce portefeuille le prix initial de l'option, puis on ne sort ni n'injecte d'argent dans ce portefeuille. Les seules variations de valeur de ce portefeuille sont alors dues aux variations de cours du sous-jacent et au taux d'intérêt r du Cash.

Soit $\Psi(t, S_t)$ la valeur à l'instant t du portefeuille de couverture. Les conditions que nous venons d'énoncer se traduisent par l'existence de deux processus

². Les problématiques liées à la prise en compte du *smile* de volatilité seront abordées plus loin.

progressivement mesurables a_t et b_t vérifiant le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \Psi(t, S_t) = a_t S_t + b_t \\ d\Psi(t, S_t) = a_t dS_t + b_t r dt \end{cases}$$

Il vient alors que: $a_t = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, S_t)$, et b_t est déterminé par différence à partir de la première équation.

La quantité $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, S_t)$, qui mesure la sensibilité du portefeuille aux variations du cours à l'instant t , est appelée le "delta" du portefeuille, et est notée δ_t . Elle représente le nombre de parts du sous-jacent S à détenir dans le portefeuille de couverture. On parle de "gamma" pour la dérivée seconde $(\partial^2 \Psi / \partial x^2)(t, S_t)$, et de "véga" pour la dérivée de Ψ par rapport à la volatilité σ .

On peut vérifier dans le cas du Call standard dans le modèle de Black et Scholes, que $\frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) = \mathcal{N}(d_1)$, bien que les quantités d_1 et d_0 dépendent elles-mêmes de S_t .

Ce type de couverture s'applique particulièrement bien pour des options standard comme le Call, car le "delta" est toujours positif et est une fonction assez lisse comme le montre le graphique de l'annexe A.2.

Par contre, les options barrières sont difficiles à couvrir de cette façon, car les grecques de ces options (le "delta, le "gamma, le "véga",...) se comportent très différemment de celles des options standard. La couverture en *delta-neutre* de ces options s'avère très peu aisée. Par exemple, quand le cours du sous-jacent s'approche de la barrière et que l'option est proche de la maturité, le "delta" du Call Up-and-Out prend des valeurs négatives importantes, comme le montre le graphique de l'annexe A.2, parce que la fonction de paiement fait un saut dans cette région. Finalement, alors qu'il conviendrait pour le hedger, étant données les fortes variations du "delta" de l'option barrière, de réajuster sa position très régulièrement, les opérateurs sont souvent contraints à réduire leur fréquence de trading afin de contrôler les coûts de transaction.

Ces différents éléments font que pour une même fréquence de trading, autant un Call standard est bien couvert, autant le portefeuille de couverture d'un Call Up-and-Out répliquera difficilement le flux final de l'option barrière. Nous verrons dans un paragraphe suivant de quel ordre de grandeur sont ces différences performance des couvertures.

2.3.2 Couverture statique

Les problèmes rencontrés avec la couverture dynamique des options barrières ont conduit les utilisateurs à envisager un autre type de couverture radicalement différent: la couverture *statique*.

Une couverture statique implique la constitution d'un portefeuille de couverture à la date initiale, composé d'un certain nombre d'actifs de couverture,

et de le conserver jusqu'à la maturité de l'option à couvrir, l'option barrière. Ainsi, l'opérateur ne supporte les coûts de transaction qu'une seule fois, et n'a pas à réajuster continuellement sa position. Pourvu qu'il ait effectué un choix judicieux de portefeuille de couverture, il s'épargne les contraintes de la couverture dynamique.

Dans les faits, on cherche plutôt des couvertures *semi-statiques*, dans la mesure où le portefeuille de couverture est rebalancé si le cours du sous-jacent tape la barrière. Cette pratique évite de conserver dans son book un portefeuille de couverture dont la valeur peut varier à la hausse comme à la baisse au cours du temps, alors que le produit à couvrir a expiré avec une valeur nulle.

Pour compenser la perte de flexibilité engendrée, on est amené à couvrir les options barrières à partir d'options standard, dites encore options vanilles, et non du sous-jacent et de l'actif sans risque comme évoqué dans la couverture en *delta-neutre*. En effet, du fait de leur caractère optionnel, les options vanilles sont plus finement liées aux options barrières.

Nous allons ici chercher à mettre en place quelques couvertures statiques, en nous basant sur l'état de l'art actuel.

2.4 Mesures de performance

Il convient de préciser ce qu'on peut entendre par une stratégie de couverture efficace, ou tout du moins comment on peut comparer deux couvertures différentes du même produit.

Pour ce faire, nous allons nous baser sur la comparaison des couvertures dynamiques en *delta-neutre* d'un Call standard et d'un Call Up-and-Out de même caractéristiques.

2.4.1 Considérations moyenne-variance

Soient X la variable aléatoire représentant le flux terminal de l'option barrière, et Z la variable aléatoire représentant le flux terminal du portefeuille de couverture.

Une première mesure de la performance de la couverture pourrait consister à estimer l'espérance de l'erreur de réplique, $E(Z - X)$, qu'on voudrait idéalement nulle afin que le portefeuille ait des chances de répliquer parfaitement l'option barrière.

L'inconvénient majeur est très clair: la seule donnée du moment d'ordre 1 est loin de caractériser entièrement la distribution. Imaginons un produit qui rapporte toujours 10 à la date T , et un portefeuille de couverture de ce produit qui rapporte 30 avec probabilité $1/2$ et -10 avec probabilité $1/2$; l'espérance de

l'erreur de réplication est nulle, mais le portefeuille en question ne sera certainement pas considéré comme la couverture idéale du produit!

Il paraît absolument évident qu'il faut faire intervenir au minimum un moment d'ordre 2, caractérisant la dispersion de l'erreur de réplication, afin d'évaluer le niveau de performance de la couverture. La variance paraît un bon candidat à ce sujet. Il est clair qu'une distribution de probabilité n'est absolument pas entièrement caractérisée par ses deux premiers moments ³; cependant pour des raisons pratiques, et comme le font de nombreux gérants, on ne s'intéressera qu'aux deux premiers.

2.4.2 Indicateur de performance

L'indicateur de performance de la couverture est défini dans [15] par le ratio entre l'écart-type de l'erreur de réplication et le prix théorique initial de l'option. Cet indicateur peut être interprété comme une mesure du pourcentage de survalorisation de l'option qui s'avère nécessaire afin de fournir un certain niveau de protection contre la perte, c'est-à-dire qu'en augmentant le prix de l'option, on décale la distribution de l'erreur de réplication vers le côté positif.

Si C_0 représente le prix de l'option à la date initiale, l'indicateur de performance ainsi défini s'écrit:

$$IP = \frac{\sqrt{\text{var}(Z - X)}}{C_0}$$

De toute façon, il est bien clair que la meilleure idée qu'on puisse se faire de la qualité de la couverture reste dans le tracé de sa fonction de densité à partir d'un grand nombre de simulations informatiques. Le côté conservateur de la couverture apparaît alors immédiatement: face à un produit complexe, les opérateurs préfèrent généralement une couverture qui surréplique quasi-systématiquement l'option, quitte à la faire payer un peu plus chère initialement. L'erreur de réplication présentera alors un support inclus dans la demi-droite réelle positive.

Les résultats obtenus pour la couverture en *delta-neutre* du Call standard et du Call Up-and-Out sont présentés en annexe A.3. On obtient les indicateurs de performance suivants:

- $IP_C = 0.07$
- $IP_{UOC} = 5.14$

La différence entre ces deux valeurs justifie bien la recherche de couvertures alternatives à la couverture classique en *delta-neutre* de l'option barrière.

3. Les troisième et quatrième moments sont révélateurs de l'asymétrie et de la leptokurticité de la distribution.

Chapitre 3

Couverture statique

3.1 Modèle de Black et Scholes

3.1.1 Description

Le modèle proposé par Black et Scholes, déjà évoqué dans les sections précédentes, pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t).

On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r . Il faut noter que r est ici un taux d'intérêt instantané.

On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = \exp(rt)$, pour $t \geq 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) un mouvement brownien standard sous la probabilité historique. Cette équation se résout explicitement:

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de S_t est une loi log-normale.

Cela signifie que le processus S_t vérifie les propriétés suivantes:

- continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements relatifs,
- stationnarité des accroissements relatifs.

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier, donc dans notre cas de l'option barrière, et en particulier du Call Up-and-Out.

3.1.2 Intérêt du modèle

Le modèle de Black et Scholes présente l'intérêt d'exhiber assez facilement la probabilité risque-neutre, \mathbb{Q} , équivalente à la probabilité historique, sous laquelle les prix des actifs actualisés suivent des martingales.

Le théorème de Girsanov nous dit alors que $W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

Ce modèle conduit alors, en raison de sa simplicité, à l'obtention de formules fermées pour la valorisation d'un certain nombre de produits dérivés, comme nous l'avons déjà vu pour les Calls standards et les Calls Up-and-Out. L'utilisation de ces formules fermées pour calculer de prix des options vanilles constituant le portefeuille de couverture à la base des couvertures statiques permet un gain de temps non-négligeable par rapport à l'imbrication de plusieurs méthodes de Monte-Carlo, l'une pour calculer les prix, l'autre pour déterminer la couverture.

D'autre part, ces formules sont aujourd'hui couramment utilisées par les praticiens, malgré le caractère simplificateur du modèle, et servent de référence sur les marchés. En effet, le modèle permet de se faire des idées sur le comportement d'un certain nombre de produits financiers et de couvertures, et de réaliser par la suite des ajustements à la marge, en partant de la trame de fond de Black et Scholes.

C'est dans ce contexte que nous allons traiter dans un premier temps la couverture statique des options barrières, puis dans le chapitre suivant, nous essaierons justement de pallier les inefficacités du modèle de Black et Scholes ou tout du moins d'étudier l'impact d'un changement de modèle sur la détermination des paramètres de couverture.

3.2 Stratégie *Stop-Loss Start-Gain*

3.2.1 Intuition et principe

La stratégie *Stop-Loss Start-Gain*, détaillée dans [6], est une stratégie de trading, simple, qui permet de répliquer la fonction de paiement d'une option. Cette stratégie se révèle statique puisque l'ensemble des temps où des transactions ont lieu est de mesure de Lebesgue nulle.

Dans le cas de la couverture d'un Call standard, il existe deux régions de couverture:

- si le cours est inférieur au prix d'exercice actualisé, l'opérateur ne détient rien,
- si le cours est supérieur au prix d'exercice actualisé, la position de l'opérateur a pour valeur $S_t - K \exp(-r(T - t))$.

Toutes les transactions pour la couverture ont lieu à la frontière de ces deux régions où le cours du sous-jacent est égal au prix d'exercice actualisé: $S_t = K \exp(-r(T - t))$. Cette stratégie, qui semble en premier lieu auto-finançante, réplique la fonction de paiement d'un Call standard $(S_T - K)_+$ à la date T .

Considérons maintenant un Call Down-and-In; c'est-à-dire une option barrière de fonction de paiement $\varphi = (S_T - K)_+ 1_{\min_{t \in [0, T]} S_t < H}$.

Afin de répliquer ce flux terminal, l'opérateur devrait suivre une stratégie *Stop-Loss Start-Gain* "retardée". Pour implémenter cette stratégie, l'opérateur ne doit rien détenir tant que la barrière n'a pas été touchée, et débiter la stratégie présentée plus haut à partir du moment où le cours a franchi la barrière. Ainsi, comme le montre le schéma de l'annexe B.1, il existe trois régions distinctes de couverture:

- si la barrière n'a pas été touchée, l'opérateur ne détient rien,
- si la barrière a été touchée et que le cours du sous-jacent est en-dessous du prix d'exercice actualisé, l'investisseur ne détient rien,
- si la barrière a été touchée et que le cours du sous-jacent est au-dessus du prix d'exercice actualisé, la position de l'investisseur a pour valeur $S_t - K \exp(-r(T - t))$.

La fonction de paiement résultant de cette stratégie est de 0 si le cours du sous-jacent n'a jamais touché la barrière, et celle d'un Call standard si la barrière a été atteinte durant la vie de l'option. Cette stratégie réplique donc bien une option barrière de type Call Down-and-In.

Intéressons-nous de plus près à ce qui se passe au niveau de la frontière où le cours du sous-jacent est égal au prix d'exercice actualisé. Si la barrière n'a pas été touchée, alors la couverture ne change pas car le Call Down-and-In n'a pas

été activé. Si l'option barrière a été activée, alors l'opérateur doit emprunter $K \exp(-r(T-t))$ en actif sans risque et utiliser cet argent pour acheter une action du sous-jacent dont le cours vaut S_t . Puisque toutes les transactions ont lieu sur cette frontière, il apparaît qu'il n'y a aucun coût pour l'opérateur.

Tant que le cours reste au-dessus du prix d'exercice actualisé, l'opérateur laisse sa position inchangée. Par contre, dès que le cours franchit à nouveau la frontière, l'opérateur ne doit plus rien détenir: il liquide sa position sur la frontière en vendant son action et en remboursant son emprunt.

Cette stratégie de couverture statique d'une option barrière particulière semble auto-finçante et permet de répliquer un flux positif à partir d'une position nulle. L'hypothèse d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage serait-elle mise à mal?

3.2.2 Résolution du paradoxe

Nous allons reprendre ici les arguments présentés dans [7] et qui mettent en avant le non-respect de la propriété d'autofinancement par la stratégie *Stop-Loss Start-Gain*.

Si $P_t = \exp(-r(T-t))$ désigne le prix à la date t du zéro-coupon d'échéance T , la valeur du portefeuille de couverture suivant la stratégie *Stop-Loss Start-Gain* de réplication d'un Call standard est:

$$V_t = m(t)P_t + n(t)S_t, \quad \forall t \in [0, T]$$

où

$$\begin{cases} m(t) = -1_{S_t > KP_t} K \\ n(t) = 1_{S_t > KP_t} \end{cases}$$

Par invariance de l'autofinancement par changement de numéraire, cette stratégie de couverture est auto-finçante si la valeur du portefeuille écrit dans le numéraire P_t , $\tilde{V}_t = V_t/P_t$, vérifie:

$$d\tilde{V}_t = n(t)d\tilde{S}_t, \quad \forall t \in [0, T]$$

Or la théorie du calcul stochastique et la formule d'Itô généralisée pour des fonctions convexes qui ne sont pas nécessairement deux fois continûment différentiables prouvent que:

$$d\tilde{V}_t = n(t)d\tilde{S}_t + d\Lambda_t(K), \quad \forall t \in [0, T]$$

où $\Lambda_t(K)$ est le *temps local* en K au temps t pour le processus de l'actif risqué écrit dans le numéraire du zéro-coupon, c'est-à-dire \tilde{S} .

Ce terme supplémentaire est non-nul en raison des propriétés d'accumulation du mouvement brownien: quelle que soit la taille de l'intervalle de temps

considéré, le mouvement brownien franchit le seuil K une infinité de fois. Ainsi, la stratégie lorsque le cours franchit le prix d'exercice actualisé consiste à liquider la position sans frais, mais ceci peut se faire une infinité de fois. Cette indétermination se résout en faisant appel à la notion de *temps local*. Le montant total de financement externe s'accumule finalement en la quantité de $\Lambda_t(K)$ zéro-coupons au temps t , ce qui prouve que la stratégie en question n'est pas auto-finançante. En ce qui concerne la couverture de l'option barrière, il est immédiat que la stratégie *Stop-Loss Start-Gain* "retardée" dispose des mêmes propriétés.

En définitive, cette première idée de couverture statique introduite de façon assez intuitive se révèle inutilisable en pratique, mais se devait d'être présentée pour son côté précurseur en la matière de recherche d'alternatives à la couverture dynamique en *delta-neutre*.

3.3 Approche théorique par le principe de réflexion

3.3.1 Introduction de la fonction de paiement *ajustée*

La notion de fonction de paiement *ajustée*, exposée dans [4] et reprise dans [5], repose sur le lemme suivant:

Théorème 1 *Dans le monde de Black et Scholes, supposons que X est un portefeuille d'options européennes expirant à la date T dont la fonction de paiement est:*

$$X(S_T) = \begin{cases} f(S_T) & \text{si } S_T \in (A, B), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $H > 0$, soit Y un portefeuille d'options européennes de maturité T et de fonction de paiement:

$$Y(S_T) = \begin{cases} \left(\frac{S_T}{H}\right)^p f\left(\frac{H^2}{S_T}\right) & \text{si } S_T \in (H^2/B, H^2/A), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $p = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$, r et σ représentent le taux d'intérêt et la volatilité. Alors, X et Y ont la même valeur si le cours du sous-jacent est égal à H .

La fonction de paiement de Y est la réflexion de la fonction de paiement de X suivant l'axe H . Il convient de noter que A ou B peuvent valoir respectivement 0 ou ∞ . Ce lemme dépend du modèle et utilise les hypothèse du monde de Black et Scholes.

Un produit dérivé de type Up-and-Out, associé à la fonction de paiement f si la barrière n'a pas été franchie durant la vie de l'option, se voit correspondre

la fonction de paiement *ajustée* \hat{f} suivante:

$$\hat{f}(S_T) \equiv \begin{cases} -\left(\frac{S_T}{H}\right)^p f\left(\frac{H^2}{S_T}\right) & \text{si } S_T > H, \\ f(S_T) & \text{si } S_T < H. \end{cases}$$

Cela signifie que pour répliquer le produit dérivé de type Up-and-Out, il suffit de répliquer le profil de la fonction de paiement \hat{f} à la date d'échéance T : le problème de couverture d'un produit de nature *path-dependent* se ramène donc à la réplification d'un produit dont la fonction de paiement dépend uniquement de la valeur du cours du sous-jacent à la date finale T . En contrepartie, le profil de paiement perd sa simplicité et sa linéarité par morceaux.

Ici, nous considérons un Call Up-and-Out, donc $f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$.

La fonction de paiement *ajustée* à répliquer, tracée dans l'annexe B.2, est donc:

$$\hat{f}(S_T) \equiv \begin{cases} -\left(\frac{S_T}{H}\right)^p \max\left(\frac{H^2}{S_T} - K, 0\right) & \text{si } S_T > H, \\ \max(S_T - K, 0) & \text{si } S_T < H. \end{cases}$$

3.3.2 Adaptation pratique

La fonction de paiement obtenue présente un caractère non-linéaire. Il n'est donc pas évident que la réplification de ce produit soit beaucoup plus aisée que celle du Call Up-and-Out de départ. Il convient pour cela de faire quelques approximations.

On remarque immédiatement que la partie non-linéaire du graphique est très proche d'un segment de droite, dans le sens où la courbure est très faible.

On peut ainsi approcher cette fonction de paiement par une fonction linéaire par morceau ¹, non-nulle pour $S_T \in [H, H^2/K]$. En faisant cette approximation, on se ramène en fait au cas où $p = 1$, c'est-à-dire $r = 0$. Ce cas plus restrictif est traité dans [19] et conduit à la formule exacte:

$$UOC = [C(K) - C(H)] - 2(H - K) BC(H) + \frac{K}{H} \left[C(H) - C\left(\frac{H^2}{K}\right) \right]$$

où UOC représente le prix du Call Up-and-Out, $C(E)$ le prix du Call standard de prix d'exercice E , et $BC(E)$ le prix du Call Binaire qui rapporte 1 si $S_T \geq E$ et 0 sinon.

En effet, le travail consiste alors à répliquer la fonction de paiement ajustée, considérée comme linéaire par morceaux, à l'aide d'une combinaison d'options standard. Les deux parties linéaires peuvent être dupliquées par des *Call spreads*,

¹. Selon la fonction approximante choisie, on adoptera un profil plus ou moins conservateur en terme de surréplication.

instruments financiers consistant en l'achat et la vente de deux Calls standard de même maturité mais de prix d'exercice différents. De plus, la discontinuité de la fonction lorsque $S_T = H$ peut être reproduite grâce au *Call Binaire* introduit plus haut. Les coefficients multiplicateurs définissant les quantités à investir dans chacun de ces instruments sont déterminées à partir des pentes de la fonction de paiement.

Le dernier obstacle dans la constitution de la couverture statique réside dans la réplcation du Call Binaire: cet instrument ne fait pas réellement partie de la classe des instruments standards de couverture, et il doit à son tour être répliqué à partir d'options standards. Pour cela, on remarque qu'un Call Binaire est la limite d'un Call spread quand la différence des deux prix d'exercice tend vers 0. En pratique, on approchera donc le Call Binaire en réalisant un Call spread "très serré", et en adaptant les quantités comme il se doit.

3.3.3 Performances de la couverture

On traite ici le cas où $r = 0.05$, $\sigma = 0.30$, $K = 100$ et $H = 130$.

Afin de pouvoir implémenter la couverture, on fait une hypothèse supplémentaire sur le marché financier: on suppose que l'on dispose de Calls standard, de maturité T , et pour des prix d'exercice pouvant prendre toutes les valeurs entières comme 129, 131 et 169. Cette hypothèse est relativement forte, mais elle n'est pas plus exagérée que celle de pouvoir effectuer des transactions de façon continue. On ne suppose pas l'existence d'un continuum de prix d'exercice, mais seulement la présence de toutes les valeurs entières.

On approche ainsi le Call Binaire $BC(130)$ par le Call spread normalisé $\frac{C(129) - C(131)}{2}$; et on fait les ajustements nécessaires au niveau des coefficients pour assurer la continuité de la fonction de paiement.

On constitue de ce fait le portefeuille suivant ²:

$$\frac{30}{29} [C(100) - C(129)] - \frac{60}{2} [C(129) - C(131)] + \frac{30}{38} [C(131) - C(169)]$$

et on teste la couverture ainsi obtenue.

Le prix de ce portefeuille de couverture, calculé à partir des formules fermées dans le monde de Black et Scholes, est de 1.43, valeur à comparer au prix du Call Up-and-Out à couvrir qui est de 1.50.

Le tracé de la fonction de densité de probabilité de l'erreur de réplcation dans l'annexe B.2 conduit à un indicateur de performance de $IP_{UOC} = 0.20$. On constate que l'on a un dirac en 0 de 0.4587. Cependant, la moyenne de l'erreur

2. Qu'il faut liquider si la barrière est franchie.

de réplcation est de -0.11: en augmentant le prix du portefeuille de couverture de 0.11, ce qui l'amène à 1.54, on obtient une erreur de réplcation de moyenne nulle, et un bon indicateur de performance.

En définitive, cette méthode de couverture, en partant d'un lemme sur le principe de réflexion, permet de couvrir efficacement un Call Up-and-Out à partir de quelques options standard. Le problème vient d'obstacles pratiques puisqu'on a fait plusieurs approximations et qu'on a supposé l'existence de Calls avec de nombreux prix d'exercice. Ceci illustre parfaitement la difficulté récurrente de transition de la recherche théorique vers la recherche appliquée.

3.4 Réplication à la barrière

Cette méthode se base sur l'article [8]. L'idée est de répliquer à certaines dates et certains niveaux de cours précis, grâce à un portefeuille d'option vanilles, la valeur de l'option barrière. Après avoir expliqué la principe général de cette réplcation en l'appliquant dans un monde binomial, nous allons ensuite l'utiliser dans le monde réel, continu.

3.4.1 Principe de la réplcation à la frontière

Nous nous placerons dans un monde binomial, pour mieux visualiser le principe de la méthode, et parce que dans ce cas précis, on peut parfaitement répliquer une option barrière en utilisant un nombre fini d'options vanilles. La méthode binomiale se base sur trois aspects principaux :

- *L'arbre binomial risque neutre.* C'est l'arbre des prix de l'action construit sous la probabilité risque neutre.
- *Les conditions aux bornes.* Ce sont les valeurs de l'option à certaines dates et certains niveaux de cours (noeuds de l'arbre). Les valeurs de l'option à l'intérieur de ces frontières sont déterminées de manière unique à partir de ces valeurs aux bornes.
- *L'équation rétrograde.* C'est la formule qui permet de calculer toutes les valeurs de l'option à partir de sa valeur à la frontière, en rétrogradant dans l'arbre.

Cette méthode est résumée par le schéma B.3.

De façon à mieux comprendre la technique de réplcation, nous allons l'expliquer sur un exemple simple, détaillé dans l'annexe B.3. En supposant le taux d'intérêt nul et la probabilité risque neutre de $(1/2, 1/2)$, nous avons un arbre binomial du cours comme sur la figure B.4. L'arbre B.5 présente l'arbre binomial de l'option barrière que l'on veut couvrir, avec la barrière à répliquer. Les figures B.6, B.7, et B.8 montrent comment on réplique de proche en proche cette barrière, pour arriver finalement à une réplcation parfaite de l'option à l'intérieur de la frontière. Ainsi le principe est, après avoir répliqué la fonction

de paiement de l'option barrière à maturité avec une vanille de mêmes caractéristiques, de faire de proche en proche les bonnes combinaisons linéaires pour annuler la valeur du portefeuille aux noeuds de la barrière.

Remarques :

- Le portefeuille de réplication n'est pas unique, on peut utiliser des options avec par exemple des prix d'exercice plus grands pour annuler à la barrière.
- La couverture obtenue est semi-statique, à savoir qu'il faut déboucler la position quand on touche la barrière.
- La couverture est parfaite dans ce cas avec un nombre fini d'options, mais ne l'est pas en continue si le portefeuille n'est pas infini.

3.4.2 Application au monde réel

Le principe exposé dans la section précédente s'applique très bien au monde réel, à la différence près qu'un nombre infini d'options est nécessaire pour répliquer de façon parfaite une option barrière. Mais un portefeuille fini permet une bonne approximation de l'option, tout comme une couverture en *delta-neutre* discrétisée approxime de façon satisfaisante une couverture continue.

Le figure 3.1 présente quel type d'option est nécessaire selon que la barrière est dans ou en dehors de la monnaie. Ainsi pour les barrières au-dessus on utilise des calls hors de la monnaie, et pour des barrière en dessous on utilise des puts hors de la monnaie.

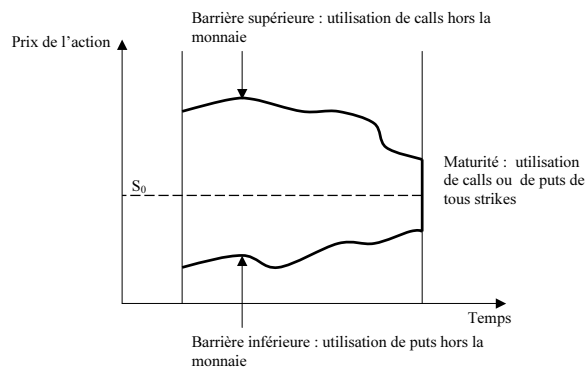


FIG. 3.1 – Principe du choix des options

Après avoir déterminé les dates $\{t_1, t_2, \dots, t_n = t_{exp}\}$, auxquelles on veut que la barrière soit annulée, un algorithme à suivre pour construire un portefeuille de couverture basé sur le principe précédent est le suivant :

Algorithme 1 :

On veut couvrir une option barrière Up-and-Out de prix d'exercice K , de barrière H et de maturité t_{exp} .

- 1- Répliquer la fonction de paiement à la barrière avec une option de strike K et de maturité t_{exp}
- 2- Poser $t_k = t_{n-1}$
- 3- Calculer la valeur du portefeuille pour $S = H$ à t_k
- 4- Trouver la quantité de call de prix d'exercice H de maturité t_{k+1} nécessaire pour annuler la valeur calculée précédemment.
- 5- Ajouter cette dernière option selon la quantité calculée précédemment dans le portefeuille
- 6- Poser $t_k = t_{k-1}$
- 7- Faire 3 à 6 jusqu'à $t_k = t_1$

Remarque : Comme dans la section précédente la couverture calculée est semi-statique, il faut ainsi déboucler la position quand la barrière est touchée. Si elle est touchée pour $t = t_k$ alors sa valeur est nulle, sinon le portefeuille a une valeur, petite mais non nulle, qui correspond au biais de discrétisation.

Cet algorithme est une manière simple pour couvrir de façon aussi précise que l'on veut (il suffit de faire tendre n vers l'infini) une option barrière Up-and-Out. Une option Down-and-In peut se couvrir de façon analogue avec des puts, et les options de type out se retrouvent en utilisant les relations de parité. Ainsi cette méthode s'avère assez performante, son gros inconvénient étant que les caractéristiques des options utilisées pour couvrir sont des données endogènes du problème, ce qui ne correspond pas à la réalité.

3.4.3 Performances de la couverture

Pour plus de détails sur les différents tests effectués, il faut se référer à l'annexe B.4.

En résumé cette couverture est très efficace dans la grande majorité des cas, à savoir si la barrière n'est pas touchée ou est touchée assez tôt. Dans cas limite où la barrière est touchée entre t_{n-1} et t_n , cette couverture est totalement inefficace, se résumant à une couverture de l'option barrière par une option vanille de même caractéristiques. Mais, comme nous le voyons sur la figure B.11, ce cas est rare, même pour une barrière pas trop éloignée du strike.

Le principal inconvénient de cette méthode reste le fait que les options utilisées ne sont pas nécessairement disponibles sur les marchés et, si l'on veut une couverture convenable, doivent être en nombre élevé. Pour des options de faible

maturité il n'est pas évident de trouver une dizaine d'options de maturités intermédiaires.

Il est à remarquer que cette méthode peut être utilisée si les options de couverture sont imposées. Il suffit de fixer ³ autant de dates d'annulation à la barrière que d'options disponibles pour couvrir; il y a alors autant d'équations d'annulation que d'inconnues (la quantité de chaque option), et le système se résout moins facilement.

3.5 Minimisation de l'erreur quadratique

Cette technique de couverture présente l'avantage de se baser sur des actifs de couverture directement disponibles sur le marché, au lieu de construire des portefeuilles de couverture, optimaux dans un certain sens, mais irréalisables en pratique. On s'adapte ainsi aux contraintes de marché.

3.5.1 Principe

On dispose de k options standard de différentes maturités (toutes entre 0 et T) et de différents prix d'exercice. Ces options vont être utilisées comme actifs de couverture.

Soit X la variable aléatoire représentant le flux terminal de l'option barrière, et soit Z le vecteur aléatoire de paiements des actifs de couverture ($Z \in \mathbb{R}^k$). Soit β le vecteur d'allocation des actifs au sein du portefeuille de couverture: chaque β_i pour $1 \leq i \leq k$ représente la quantité d'actif i détenue dans le portefeuille. La fonction de paiement de ce portefeuille de couverture est alors $Z'\beta$, où le symbole "prime" est identifié à l'opérateur de transposition.

En ce qui concerne les options de maturité inférieure à T , maturité de l'option barrière à couvrir, le flux qu'elles apportent à leur expiration est actualisé jusqu'en T au taux d'intérêt r . Le vecteur de paiement des actifs de couverture revêt donc bien un caractère homogène en ne comportant que des flux en T .

On choisit, en accord avec [10], le vecteur de coefficients β qui minimise la moyenne quadratique de l'erreur de réplcation.

Le programme à résoudre est le suivant:

$$\min_{\beta} E[(X - Z'\beta)^2]$$

et le β optimal est ainsi:

$$\beta^* = E[ZZ']^{-1}E[ZX]$$

3. Il y a des contraintes évidentes sur les maturités des options à utiliser, mais elles ne sont pas problématiques.

Cette équation définit l'estimateur du vecteur de coefficients de régression de X sur Z en utilisant les moindres carrés ordinaires. La méthode présentée a d'abord été construite sur des modèles discrets, puis transposée aux modèles en temps continu.

Là encore se pose la question de la liquidation de la position à la barrière. La réalité de marché veut bien entendu que le portefeuille de couverture soit rebalancé lorsque le cours du sous-jacent touche la barrière, pour une option barrière de type *out*. Cependant, puisque l'on travaille dans un univers risque-neutre, que les prix sont des espérances des flux futurs réactualisés, et que l'on calcule le β^* optimal à partir d'un calcul d'espérance des flux terminaux, le fait de liquider le portefeuille à la barrière à son prix de marché⁴ ne change rien en théorie au calcul du vecteur de l'allocation optimale. Bien entendu, implémenter une couverture purement statique nécessite uniquement de simuler le cours aux différentes maturités des options standard et d'estimer le maximum du cours entre la date initiale et la date finale, alors que le fait de liquider à la barrière nécessite une discrétisation plus fine pour savoir à quel date la barrière est éventuellement franchie. En pratique, des différences peuvent être constatées en raison de la discrétisation du cours du sous-jacent. En accord avec l'intuition, on constate de plus que l'utilisation d'une couverture semi-statique permet de réduire la variance de l'erreur de réplcation.

3.5.2 Propriétés intéressantes

On peut remarquer que si on introduit l'actif sans risque dans l'ensemble des actifs de couverture, l'erreur de réplcation aura une moyenne nulle. La couverture optimale de X peut être interprétée géométriquement comme la projection orthogonale de X sur l'espace engendré par Z .

En raison de la linéarité de la couverture en moyenne quadratique, plusieurs propriétés intéressantes peuvent être dégagées.

La couverture d'un portefeuille d'actifs est équivalente à la couverture de chaque actif constituant le portefeuille pris individuellement. Cette première propriété intéresse particulièrement les banques dans la mesure où elles couvrent leur carnets d'options comme des portefeuilles globaux.

On peut en outre couvrir n'importe quel actif en moyenne quadratique par combinaison d'un certain nombre d'actifs artificiels dits biens contingents. Cette seconde propriété permet d'économiser des ressources machines en ne calculant le terme $E[ZZ']^{-1}$ qu'une seule fois.

La couverture en moyenne quadratique autorise également d'introduire des contraintes dans le programme de minimisation lorsque les quantités optimales

4. considéré comme étant celui de Black et Scholes.

de certains actifs franchissent certaines limites de position sur le marché. L'optimisation peut alors être faite en deux étapes en lançant une première fois le programme sans contrainte, puis en fixant à leur borne les quantités optimales dépassant les limites et relançant le programme sur les quantités non-saturées.

Par contre, on peut en tout état de cause noter le fait suivant: alors qu'on préfère une couverture de type statique à une couverture dynamique en raison des coûts de transaction, la détermination d'une couverture optimale par cette méthode de couverture en moyenne quadratique ignore complètement les coûts de transaction. D'un autre côté, les stratégies optimales prenant en compte les imperfections du marché comme l'existence d'une fourchette *bid-ask* gagnent énormément en complexité. On peut donc voir la couverture en moyenne quadratique comme un compromis: on reconnaît l'existence de coûts de transaction en choisissant une couverture de type statique, et on obtient un algorithme implémentable en utilisant des techniques de moindre carrés.

3.5.3 Performances de la couverture

Nous allons constituer un portefeuille d'options vanille afin de couvrir un Call Up-and-Out de maturité $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ et de barrière $H = 130$. Les résultats concernant cette nouvelle stratégie sont consignés au sein de l'annexe B.5.

Les caractéristiques des Calls standard utilisés sont précisées dans le tableau B.2, ainsi que les quantités optimales déterminées à partir de la minimisation de l'erreur quadratique. Ce vecteur β^* est, pour des raisons de simplicité de calcul, établi sur une couverture purement statique.

L'indicateur de performance obtenu à partir de 8 options de couverture est $IP_{UOC} = 2.52$. On rappelle que cet indicateur valait 5.14 en dynamique. On parvient donc à améliorer la performance en se détachant d'une couverture dynamique en *delta-neutre*.

Il n'est pas surprenant que cette couverture se basant sur 8 options standard soit moins performante que la couverture étudiée dans la section précédente à partir de 12 options standard. En effet, les options de couverture y sont astucieusement choisies, avec toutes un prix d'exercice à la barrière, ce qui n'est le cas ici.

L'avantage indéniable de cette méthode de couverture en moyenne quadratique réside dans sa souplesse: on peut choisir un instrument financier quelconque, et le couvrir à partir d'un ensemble d'actifs de couverture qui nous semble le plus adéquat. En contrepartie, il serait certainement plus efficace de s'intéresser aux problématiques plus fines soulevées par chaque produit afin de déterminer la couverture statique la plus appropriée et le type d'actif de couverture dont la nature est la plus à même de répliquer le produit en question.

Chapitre 4

Risque de modèle

Le modèle de Black et Scholes présenté dans la section précédente est historiquement le premier satisfaisant pour la simulation de cours boursiers, et est d'autant plus attrayant qu'il existe des formules fermées pour l'évaluation d'options. Mais il est avéré qu'il est assez éloigné de la réalité. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à d'autres modèles plus sophistiqués pour générer et simuler nos couvertures statiques, et nous avons testé la robustesse de ces couvertures en terme de risque de modèle, un modèle n'étant, par définition, qu'une approximation plus ou moins précise de la réalité.

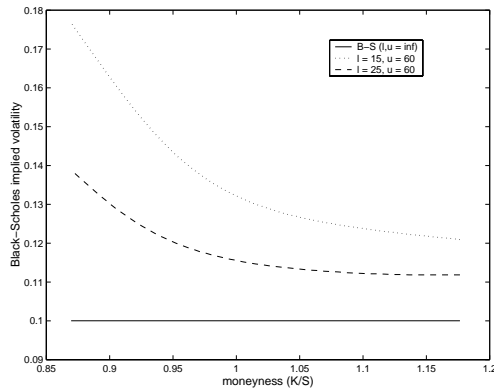
4.1 Présentation des autres modèles

Depuis un certain nombre d'années, les traders ont mis en évidence les limites du modèle de Black et Scholes en mettant en évidence *l'effet de smile* qui existe dans l'évaluation d'options. Comme nous avons vu dans la section précédente, il existe une bijection entre la volatilité et le prix d'une option dans le monde de Black et Scholes, toutes choses égales par ailleurs. Ainsi du prix de marché des options, on peut connaître la volatilité dite implicite de ces dernières, qui devrait être constante pour un même sous-jacent dans un monde de Black et Scholes. Or en extrayant des données de marchés les volatilités implicites d'option sur le même sous-jacent on obtient, en fonction du prix d'exercice, la figure 4.1. C'est le fameux effet de smile.

C'est pourquoi de nombreux autres modèles ont été développés pour tenter de "coller" au mieux à cet effet. Nous nous sommes particulièrement intéressé à deux d'entre eux, à savoir le modèle de *Dupire* et le modèle de Kou.

4.1.1 Le modèle de Dupire

Ce premier modèle n'est qu'une variation du modèle de Black et Scholes, mais a le mérite de pouvoir reproduire un effet de smile.

FIG. 4.1 – *Effet de smile sur les données de marché***Définition 1 (Le modèle de Dupire) :**

Un sous-jacent est caractérisé par trois paramètres qui sont son drift μ , sa volatilité σ et δ mettant en évidence la variation de volatilité avec le niveau du sous-jacent. On a alors:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t^{1-\delta} \sigma dB_t$$

avec B_t un mouvement brownien.

Historiquement on observe une volatilité relative du sous-jacent plus grande pour des valeurs faibles de ce dernier, ce qui correspond à $\delta \in [0,1]$. Sur la figure C.1, nous avons un exemple de cours suivant ce modèle, et C.2 est une nappe de volatilité calculée à partir de ces cours.

Mais, même si ce modèle est simple à simuler en Monte-Carlo, il ne comporte pas les sauts qui sont observés sur les cours réels et de plus on ne peut évaluer les options par des formules fermées. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à un modèle plus sophistiqué qui, de plus, possède des formules fermées, le modèle de Kou.

4.1.2 Le modèle de Kou

Présenté dans [13], ce modèle est un *modèle de diffusion à sauts doublement exponentiels*. Ainsi entre deux sauts le cours suit un Brownien géométrique à la Black et Scholes, et les sauts sont poissonniens d'intensités exponentielles. Ce modèle, tout en restant relativement simple, permet de reproduire des phénomènes observés sur les cours réels tels que l'asymétrie des distributions finales des cours, l'épaisseur des queues de distributions et l'effet de smile vu précédemment.

Définition 2 (Le modèle de Kou) :

Dans ce modèle le sous-jacent S_t suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dB_t + d \left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1) \right)$$

où B_t est un mouvement Brownien standard, $N(t)$ un processus de Poisson d'intensité λ et $\{V_i\}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées positives telles que $Y = \ln(V)$ ait une distribution exponentielle asymétrique de densité :

$$f_Y(y) = p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{y \geq 0} + (1-p) \cdot \eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{y < 0}, \quad \eta_1 > 1, \quad \eta_2 > 0$$

la condition $\eta_1 > 1$ n'étant utilisée que pour s'assurer que S_t a une espérance finie.

Dans ce modèle $N(t)$, B_t , et les Y sont supposés indépendants. L'équation que suit le rendement est donnée dans la propriété suivante.

Propriété 1 :

Le rendement logarithmique $X_t = \ln(S_t/S_0)$ a pour équation :

$$X_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad X_0 = 0$$

La figure C.3 présente un exemple de cours suivant ce modèle, et C.5 est une nappe de volatilité obtenue à partir de ce dernier.

Nous avons choisi de travailler sur ce modèle pour de multiples raisons, discutées ci-après.

Calage aux données de marché, et interprétation des facteurs

Ce modèle a l'avantage de dépendre d'un nombre relativement important de facteurs, six en l'occurrence, ce qui est à comparer aux deux facteurs du modèle de Black et Scholes ou aux trois du modèle de Dupire. Cela lui permet de s'adapter mieux aux données de marché, de "coller" à la nappe historique de volatilité implicite. De plus, ces facteurs ont une interprétation facile, ce qui rend d'autant plus agréable l'utilisation de ce modèle.

- μ et σ ont les mêmes interprétations que dans Black et Scholes à savoir respectivement la tendance et la volatilité du cours modélisé.
- λ est l'intensité du processus de Poisson des sauts, et est donc égal l'espérance du nombre de ces derniers.
- p correspond à la probabilité que, sachant qu'il y a un saut, sa valeur soit positive.
- η_1 et η_2 sont les intensités respectives des sauts positifs et négatifs, et donc leur espérance.

Ainsi ces paramètres sont d'autant plus faciles à estimer à partir de données réelles que l'on peut émettre des hypothèses sur leur valeur.

Simulation Monte-Carlo

On pourrait croire qu'étant donnée la relative complexité du modèle, sa simulation et l'utilisation du Monte-Carlo serait lente et biaisée. Il n'en est en fait rien, ce modèle se simulant au contraire bien mieux que des modèles plus simples tels que Dupire. En nous basant sur l'article [17], nous avons implémenté une méthode de simulation Monte-Carlo spécifique pour ce modèle. Le principe de base est relativement intuitif : en fait, entre chaque saut le cours suit un pont Brownien des plus classiques. Ainsi, il suffit de simuler la date des sauts et leur intensité, pour ensuite appliquer entre les deux la formule du Brownien géométrique.

L'algorithme spécifique pour le pricing des options vanilles et barrière est détaillé ci-après.

Algorithme 2 :

- 1 Simuler les dates d'occurrence des sauts par simulation d'un processus de Poisson d'intensité λ .
- 2 Simuler, pour chaque date, le sens (positif ou négatif), puis l'intensité du saut qui lui est associé.
- 3 Prendre $t = 0$
- 4 Simuler à partir de S_t la valeur du cours à la date du saut suivant $t + \Delta t$ en utilisant la formule du Brownien géométrique.
- 5 Vérifier si la barrière a été touchée en utilisant une propriété du pont Brownien qui permet de connaître la probabilité que son maximum soit supérieur à une borne spécifiée.
- 6 Calculer le cours à la date du saut en lui rajoutant le saut (positif ou négatif), $S_{t+\Delta t} = S_t + \Delta S$.
- 8 Si on calcule le prix d'une barrière et si la barrière a été touchée en 4, retourner 0. Sinon poser $t = t + \Delta t$ et reprendre à 4.
- 9 Arrivé à maturité de l'option calculer $(S_t - K)^+$ et retourner la valeur actualisée.
- 10 Reprendre 1 à 9 autant de fois qu'il y a de simulations.

Cet algorithme permet de gagner en temps par rapport aux simulations classiques de type Euler, tout en évitant les biais qui leur sont associés. Ainsi, les graphiques C.6 et C.7 présentent les performances de ces Monte-Carlo en terme de nombre de simulations et d'écart-type pour le pricing d'une option vanille et d'une option barrière. Pour l'option vanille, les 50 millions de simulations ont été effectuées en 155 secondes et pour l'option barrière en 160 secondes. Ces calculs ont été effectués sur un Athlon 2400 + cadencé à 2GHz. Ce Monte-Carlo pourrait être encore optimisé en utilisant par exemple des méthodes de réduction de variance, mais ce n'était pas le but de notre étude. D'autant plus que, comme nous allons le voir dans la section suivante, les formules semi-fermées existent pour l'évaluation des options barrières et vanilles.

Formules semi-fermées

Comme Kou l'explique dans [13], sans les sauts, ce modèle est le classique modèle de Black et Scholes, dont les différentes formules fermées ont été rappelées à la section précédente. Mais avec la partie à saut, il devient difficile de trouver de telles formules, notamment pour les options *path dependent*. En effet, pour ces options il est crucial d'étudier le temps de premier passage d'une barrière H . Avec les sauts on peut dans ce cas aussi bien toucher la borne, que la sauter et avoir $S_{\tau_H} - H > 0$, avec τ_H le temps de premier passage de la barrière. La figure C.4 illustre ce problème. Cet *overshoot* est problématique si on veut connaître la distribution du premier temps de passage de façon analytique, cela est uniquement possible grâce à la propriété *memoryless* des sauts exponentiels.

Théorème 2 (Prix d'un call Up-and-In) :

Le prix d'un call up and in dans le modèle de Kou est donné par :

$$\begin{aligned}
 UIC = & S_0 \cdot \Phi\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \ln(K/S_0), \ln(H/S_0), T\right) \\
 & - Ke^{-rT} \cdot \Phi\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \ln(K/S_0), \ln(H/S_0), T\right)
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

avec

$$\tilde{p} = \frac{p}{1 + \zeta} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}, \quad \tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1, \quad \tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1, \quad \tilde{\lambda} = \lambda(\zeta + 1)$$

et

$$\zeta = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1, \quad \Phi(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, b, T) = P\{S_T \geq a, \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq b\}$$

La formule précédente est uniquement semi-fermée, car la fonction Φ n'est pas explicite. Dans [14], il est donné une méthode pour la calculer de façon approchée. Les calculs sont très lourds mais implémentables, et donnent, selon Kou, des résultats très satisfaisants. Nous avons tenté de programmer ces pricers (vanille et barrière), mais malheureusement, pour l'un comme pour l'autre, nous avons été confrontés à des problèmes de convergence de l'algorithme. Etant donnée l'efficacité des pricers Monte-Carlo, nous avons préféré nous en tenir à ces derniers.

4.2 Tests de robustesse

4.2.1 Changement de méthode de couverture

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés en particulier à deux couvertures statiques, la couverture par réplcation à la barrière et la couverture par minimisation de l'erreur quadratique.

Nous les avons traitées séparément dans leur présentation, mais il s'avère indispensable de pouvoir les comparer.

Effectivement, la première de ces méthodes implique l'utilisation d'options vanilles d'un type spécifique, avec un prix d'exercice à la barrière. Nous pouvons très bien partir de ce panier d'options standard comme actifs de couverture dans la seconde méthode et établir une comparaison. Nous traitons toujours la couverture d'un Call Up-and-Out dont les caractéristiques sont inchangées. Les quantités optimales obtenues avec les deux méthodes sont exposées dans le tableau 4.1, où les lettres *GS* et *MS* font respectivement référence à Goldman Sachs et à la réplcation à la barrière, et à Mean Square et la minimisation de l'erreur quadratique.

| Strike | Maturité | Quantité GS | Quantité MS |
|--------|----------|-------------|-------------|
| 130 | 0.34 | 0.157301 | -0.023796 |
| 130 | 0.50 | 0.275713 | -0.018214 |
| 130 | 0.67 | 0.593085 | -0.010147 |
| 130 | 0.83 | 1.880343 | -0.010524 |
| 130 | 1.00 | -4.502630 | -0.222895 |
| 100 | 1.00 | 1.000000 | 0.148327 |

TAB. 4.1 – *Comparaison des couvertures avec six options vanilles*

Les prix des deux portefeuilles de couverture sont respectivement de 1.49 pour *GS* et de 1.46 pour *MS*, ceci en translatant les prix pour que les moyennes des erreurs de réplcation soient nulles. Le prix de l'option à réplquer est toujours de 1.50.

Ces deux couvertures sont ensuite testées sur 10 000 simulations. Le tracé de la fonction de densité de l'erreur de réplcation est fait sur le graphique C.8 dans l'annexe C.2.

Les indicateurs de performance valent:

- $IP_{GS} = 1.65$,
- $IP_{MS} = 2.92$.

Ces résultats sont conformes à nos attentes. Les options de couverture ont été choisies astucieusement avec un prix d'exercice à la barrière comme le suggère la méthode *GS*, méthode qui tient compte de la spécificité de la nature des options barrières. Il est donc naturel que la performance en terme de variance de cette couverture soit meilleure, en comparaison avec un type de couverture statique plus général comme *MS*. Les différences de prix de portefeuille de couverture traduisent ainsi le coût de la réduction du risque.

Il faut se souvenir que la méthode *GS* est basée sur un calcul récursif du nombre d'options à détenir à partir d'une base théorique, alors que la méthode

MS repose sur des simulations Monte-Carlo.

Par contre, en ce qui concerne les frais de transaction, les choses sont différentes: nous pouvons nous faire une idée de ces coûts en calculant $\sum_{options} |q_i| p_i$, où q_i est la quantité d'option i et p_i est le prix de l'option i .

Ces indicateurs de coûts de transactions valent:

- $C_{GS} = 44.12$,
- $C_{MS} = 3.26$.

Encore une fois, ceci reflète le prix à payer pour améliorer la performance de la couverture.

4.2.2 Changement de modèle

La deuxième phase dans les tests de robustesse consiste à déterminer une couverture optimale dans un modèle, et à tester sa performance dans un autre modèle. Par exemple, on peut déterminer la composition optimale d'un portefeuille par minimisation de l'erreur quadratique lorsque le cours du sous-jacent suit une dynamique de type Black et Scholes, et implémenter cette couverture statique dans un monde où le cours du sous-jacent suit un modèle à sauts de type Kou. L'évolution de l'indicateur de performance nous donne alors une idée de la robustesse de la méthode au changement de modèle.

L'annexe C.3 présente les différents résultats obtenus. Sur chaque graphique est représentée l'évolution de l'indicateur de performance de la couverture, par les méthodes GS et MS en fonction d'un paramètre important du modèle d'application.

Modèle de Dupire

Le graphique C.9 teste les couvertures dans le modèle de *Dupire*. Les résultats peuvent paraître surprenants, puisque les couvertures se montrent de plus en plus performantes quand le paramètre δ augmente. Ainsi, plus les modèles de construction et d'application des couvertures sont différents, meilleures sont les couvertures. On se souvient par ailleurs que le cas limite où $\delta = 0$ correspond au modèle initial de Black et Scholes.

Cette contradiction apparente s'explique très naturellement: comme le montre le graphique C.10, quand δ augmente, la volatilité instantanée diminue, toutes choses égales par ailleurs. La baisse de cette volatilité entraîne d'abord une hausse du prix du Call Up-and-Out puisque le cours a moins de chances de toucher la barrière H ; mais lorsque cette volatilité diminue encore, le prix redescend car la barrière a toujours peu de chances d'être touchée, mais le prix d'exercice K a lui aussi peu de chances d'être dépassé.

Les difficultés de couverture dues au fait que le cours du sous-jacent s'approche de la barrière vers la maturité s'estompent donc dans ce modèle, et les couvertures s'en trouvent plus performantes.

Modèle de Kou

Le graphique C.11 teste les couvertures dans le modèle de *Kou*, version symétrique, c'est-à-dire que la probabilité de faire un saut positif est égale à la probabilité de faire un saut négatif. Les intensités des sauts sont aussi de même amplitude à la hausse et à la baisse.

Comme on pouvait le prévoir, les indicateurs de performance des deux types de couverture se dégradent quand on augmente le paramètre λ , témoin de l'intensité des sauts.

Les mêmes tests ont été appliqués dans un modèle de *Kou*, version asymétrique, où la probabilité de faire un saut positif est inférieure à celle de faire un saut négatif, et l'intensité des sauts négatifs est plus importante que celle des sauts positifs. Les résultats sont présentés sur la figure C.12

Les indicateurs de performance se dégradent plus rapidement avec l'augmentation de λ que dans la version symétrique. On peut expliquer cela de façon intuitive, dans la mesure où ajouter des sauts complètement symétriques peut induire un effet nul en moyenne, les effets des sauts positifs compensant partiellement les effets des sauts négatifs. Cette compensation disparaît plus vite quand la distribution est asymétrique.

Nous avons de plus déterminé des couvertures optimales de type *GS* dans le modèle de *Kou* et nous les avons testées dans ce même modèle. Les résultats obtenus sont présentés sur les graphiques C.13 et C.14 dans l'annexe C.3. Les prix des options vanilles, nécessaires afin de calculer la composition du portefeuille de couverture, sont évalués par des méthodes de Monte-Carlo en raison de l'impossibilité d'utilisation des formules semi-fermées; le temps de calcul résultant nous a limité dans le nombre de simulations des couvertures que nous avons fixé à 1000.

La couverture optimale est déterminée dans un modèle de *Kou* symétrique et testée d'abord dans le même modèle puis dans un modèle de *Kou* asymétrique. Les indicateurs de performance valent respectivement 1.02 et 1.04. Cela signifie que la couverture *GS* déterminée est robuste au changement de paramètres dans le modèle de *Kou*; cependant, il convient de noter que la version asymétrique favorise les sauts négatifs, les problèmes dus au franchissement de la barrière ne perturbent donc pas l'efficacité de la couverture.

Nous avons effectué le même type de test avec la couverture *MS* par minimisation de l'erreur quadratique. Nous nous contenterons ici de citer les résultats de l'application d'une couverture déterminée dans un modèle de *Kou* symétrique: l'indicateur de performance dans le même modèle est de 3.51, celui dans le modèle asymétrique est de 4.02.

4.3 Extension

Nous avons vu dans les sections précédentes que les résultats obtenus avec les deux méthodes de couverture statique sont satisfaisants, que ce soit en terme de performance pure ou en terme de robustesse. Mais, dans les deux cas, la probabilité que l'on se retrouve avec une erreur de réplication qui vaut plusieurs fois le prix du portefeuille de couverture est loin d'être nulle, ce qui est un risque très important pour un gérant¹. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à une couverture hybride, à la fois dynamique et statique.

4.3.1 Principe

Le principe général est de couvrir l'erreur de réplication du portefeuille statique de façon dynamique, en utilisant par exemple une méthode de type *delta-neutre*. En combinant ces deux types de couverture on peut améliorer les performances de la couverture statique, tout en ne couvrant dynamiquement qu'un petit nombre de fois, et sur des faibles quantités. Cette méthode permet de compenser par exemple un faible nombre d'options dans le portefeuille initial, ou une mauvaise répartition de ces dernières. La robustesse de la couverture se trouve de plus améliorée, car le trader réagit dynamiquement à la valeur du cours.

4.3.2 Algorithme

L'algorithme utilisé pour tester cette méthode est le suivant.

Algorithme 3 :

Soient PF_t et OB_t les prix respectifs du portefeuille et de l'option barrière à la date t et S_t la valeur du cours. Nous cherchons à couvrir en delta le résidu $\varepsilon_t = PF_t - OB_t$. Les dates de couverture sont $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n\}$.

- 1- Calculer $\varepsilon_0 = PF_0 - OB_0$.
- 2- Calculer $\Delta_0 = \Delta PF_0 + \Delta OB_0$.
- 3- Acheter $\Delta_0 S_0$ et placer $d_0 = \varepsilon_0 - \Delta_0 \cdot S_0$ en cash.
- 4- $t_i = t_1$.
- 5- Calculer $\varepsilon_{t_i} = \varepsilon_{t_{i-1}} + (S_{t_i} - S_{t_{i-1}})\Delta_0 + d_0 \cdot r \cdot (t_i - t_{i-1})$.
- 6- Calculer $\Delta_{t_i} = \Delta PF_{t_i} + \Delta OB_{t_i}$.
- 7- Acheter $\Delta_{t_i} S_{t_i}$ et placer $d_{t_i} = \varepsilon_{t_i} - \Delta_{t_i} \cdot S_{t_i}$ en cash.
- 8- Si $i \neq n$ poser $i = i + 1$ et revenir à 5.

Cet algorithme reprend en fait le principe de la couverture dynamique en *delta-neutre*, mais en l'appliquant au résidu et non au portefeuille global.

1. Même s'il peut être gommé par mutualisation.

4.3.3 Résultats

Nous avons utilisé cette méthode en prenant pour portefeuille de base une couverture de type répliation à la barrière. Pour un portefeuille contenant six options vanilles, on passe d'un indicateur de performance de 1,2 à un indicateur quasiment nul (0,004), en réajustant cinquante fois. Il est évident que le coût de la couverture augmente avec la fréquence de rebalancement, donc avec la performance de la couverture.

Mais dans tous les cas les performances sont grandement améliorées, que ce soit celles d'une couverture statique ou d'une couverture dynamique. C'est ensuite au trader de faire l'arbitrage entre la qualité de sa couverture et son coût.

Une fonction de densité obtenue grâce à cette méthode est présentée dans la figure 4.2.

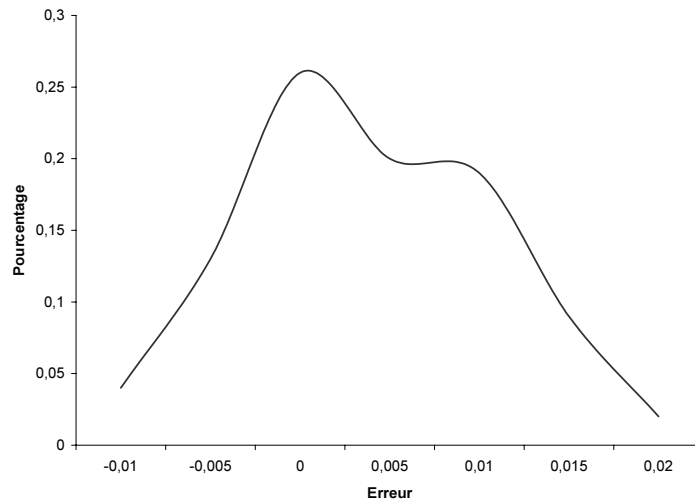


FIG. 4.2 – Densité de probabilité de l'erreur de répliation

Chapitre 5

Conclusion

A la lumière du principe de fonctionnement des options barrières et des méthodes classiques de couverture dynamique, l'intérêt de couvrir de façon statique de tels produits est évident. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à deux méthodes: la couverture par réplication à la barrière et la couverture par minimisation de l'erreur quadratique.

La première est basée sur les fondamentaux de l'option barrière en visant à annuler la valeur du portefeuille de couverture lorsque le cours du sous-jacent est égal à la barrière. Les quantités optimales d'options standards de couverture sont ainsi calculées par récurrence rétrograde en partant de la date de maturité de l'option barrière. Cette méthode se révèle contraignante par le choix des options de couverture, mais le fait qu'elle s'intéresse à la spécificité intrinsèque des options barrières réduit le risque de modèle.

La seconde se fonde elle sur des arguments plus statistiques en recherchant la combinaison linéaire optimale d'options standards de couverture, optimale dans la mesure où elle minimise l'espérance de l'erreur quadratique de réplication. Elle présente l'avantage indéniable de pouvoir s'adapter à la situation réelle de disponibilité des actifs de couverture. En contrepartie, les trajectoires étant simulées dans un modèle bien défini, elle s'avère beaucoup moins robuste au changement de modèle.

Dans une perspective d'ouverture, on peut penser que la combinaison des méthodes statique et dynamique permette de tirer parti des avantages propres à chacune. Une base de réplication statique à partir de quelques options standards, accompagnée de la couverture dynamique en *delta-neutre* du résidu, semble converger vers des résultats intéressants.

Annexe A

Couvertures dynamiques en delta-neutre

A.1 Paramètres des formules fermées

Dans le modèle de Black et Scholes, le cours de l'actif risqué suit le modèle de diffusion:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

où r et σ sont des constantes.

- Le prix à la date t du Call standard, de fonction de paiement $\varphi = (S_T - K)_+$ en T , est alors donné par la formule:

$$C_t = \mathcal{N}(d_1)S_t - \mathcal{N}(d_0)K \exp(-r(T-t))$$

avec:

\mathcal{N} fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \right),$$

$$d_0 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

- Le prix à la date t du Call Up-and-Out, de fonction de paiement $\varphi = (S_T - K)_+ 1_{\max_{t \in [0, T]} S_t < H}$ en T , est donné lui par la formule:

$$\begin{aligned} UOC_t = & \{ \mathcal{N}(d_1) - \mathcal{N}(d_3) - \alpha'(\mathcal{N}(d_6) - \mathcal{N}(d_8)) \} S_t \\ & - \{ \mathcal{N}(d_2) - \mathcal{N}(d_4) - \alpha(\mathcal{N}(d_5) - \mathcal{N}(d_7)) \} \exp(-r(T-t))K \end{aligned}$$

avec:

\mathcal{N} fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$h = (1/(\sigma\sqrt{T-t})) \log(H/S_t),$$

$$\begin{aligned}
k &= (1/(\sigma\sqrt{T-t})) \log(K/S_t), \\
\lambda' &= \lambda + \sigma = r/\sigma + \sigma/2, \\
\alpha &= (H/S_t)^{2\lambda/\sigma}, \\
\alpha' &= (H/S_t)^{2\lambda'/\sigma}, \\
d_1 &= \lambda' \sqrt{T-t} - k, \\
d_2 &= \lambda \sqrt{T-t} - k, \\
d_3 &= \lambda' \sqrt{T-t} - h, \\
d_4 &= \lambda \sqrt{T-t} - h, \\
d_5 &= -\lambda \sqrt{T-t} - h, \\
d_6 &= -\lambda' \sqrt{T-t} - h, \\
d_7 &= -\lambda \sqrt{T-t} - 2h + k, \\
d_8 &= -\lambda' \sqrt{T-t} - 2h + k.
\end{aligned}$$

A.2 Graphes des sensibilités *deltas*

On rappelle l'expression du paramètre *delta*:

$$\delta_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$$

où $C(t, S_t)$ représente le prix de l'option considérée à la date t , alors que le cours du sous-jacent vaut S_t .

Le graphique du *delta* du Call standard, de maturité $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ est représenté sur la figure A.1.

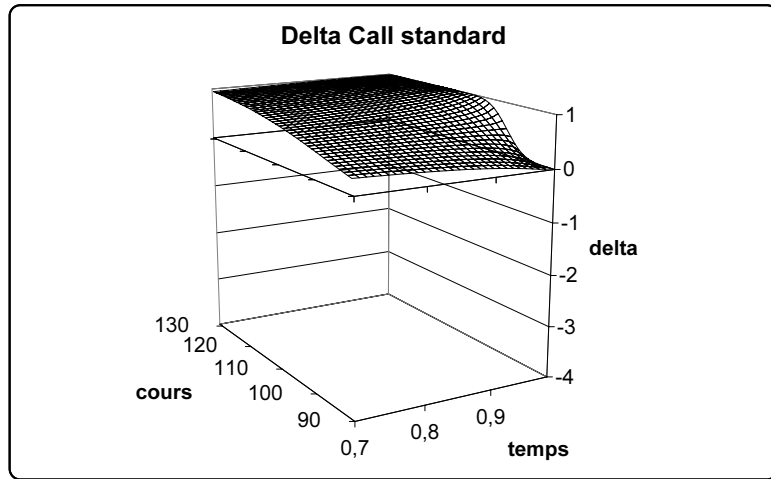


FIG. A.1 – *Delta du Call standard*

Le graphique du *delta* du Call Up-and-Out, de maturité $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ et de barrière $H = 130$ est représenté sur la figure A.2.

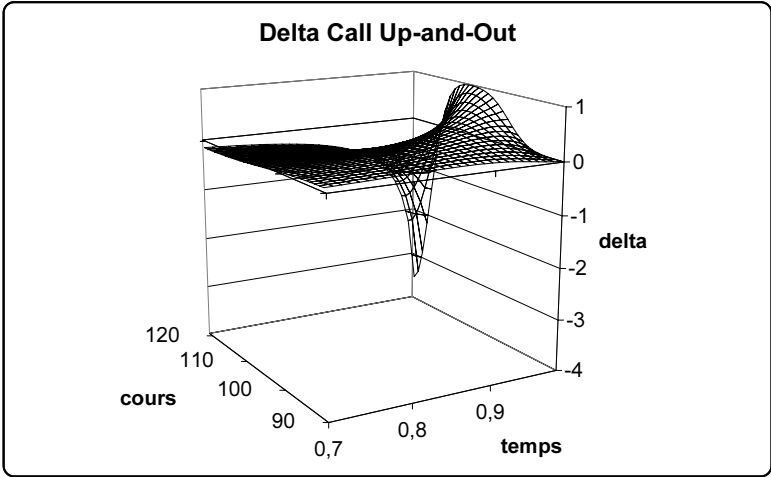


FIG. A.2 – Delta du Call Up-and-Out

A.3 Performances des couvertures

Les couvertures dynamiques en *delta-neutre* sont successivement appliquées au Call standard et au Call Up-and-Out dans un monde Black et Scholes où $r = 0.05$ et $\sigma = 0.30$.

10 000 simulations de couverture ont été faites, avec 100 points de réajustement de la couverture entre la date initiale et l'échéance, et les fonctions de densité de probabilité empiriques obtenues sont représentées sur les graphiques A.3 et A.4 ¹.

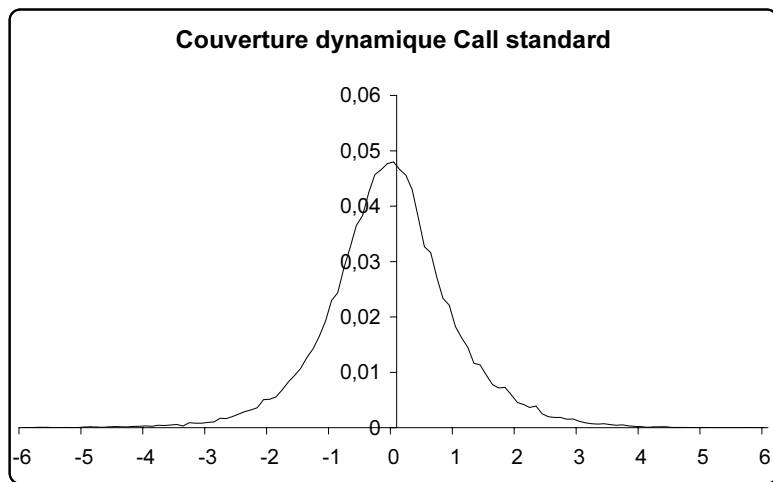


FIG. A.3 – Couverture dynamique du Call standard

Le prix théorique du Call standard de maturité $T = 1$ et de prix d'exercice $K = 100$ est $C_0 = 14.23$.
On obtient $IP_C = 0.07$.

Le prix théorique du Call Up-and-Out de maturité $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ et de barrière $H = 130$ est $UIC_0 = 1.50$.
On obtient: $IP_{UIC} = 5.14$.

La comparaison des deux distributions apparaît sur le graphique A.5.

De prime abord, la forme de pic plus serré pour le Call Up-and-Out pourrait faire penser que la couverture dynamique de l'option barrière est meilleure que celle de l'option vanille. Cependant, l'imperfection de cette couverture tient essentiellement dans l'épaisseur des queues de distribution.

1. On fera attention aux échelles sur l'axe des abscisses.

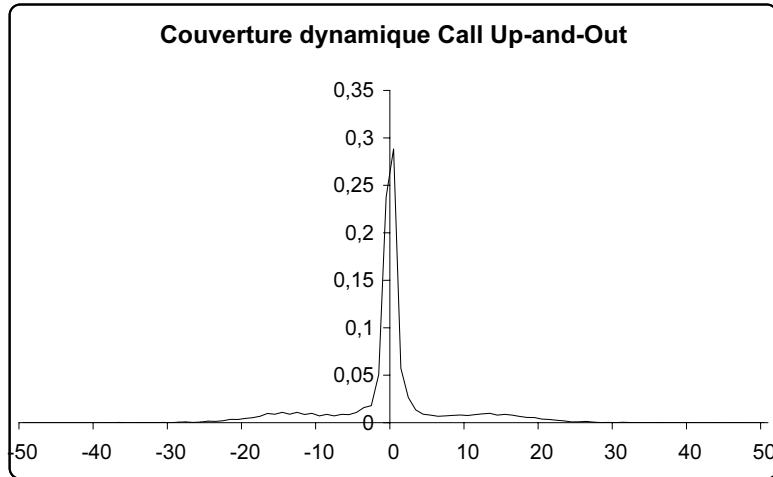


FIG. A.4 – Couverture dynamique du Call Up-and-Out

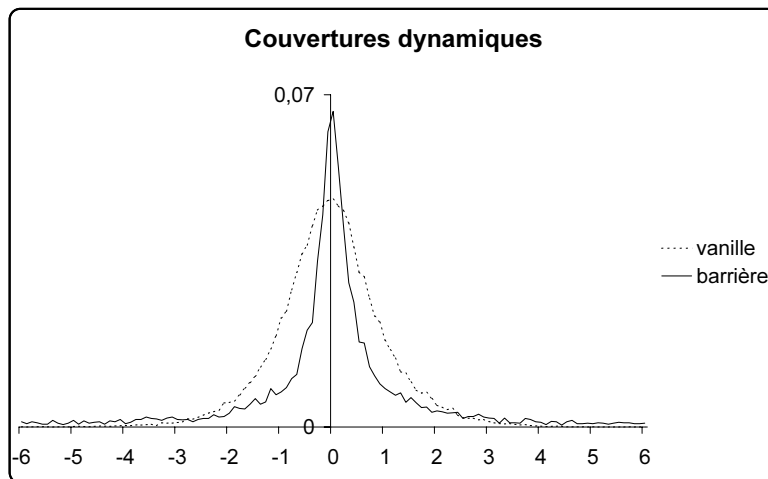


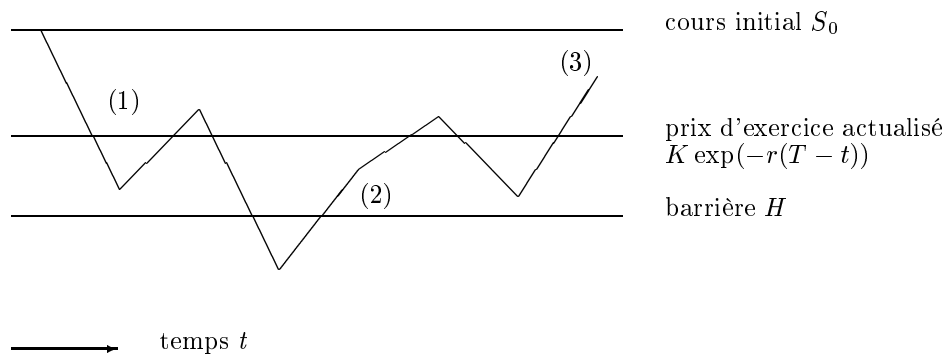
FIG. A.5 – Comparaison des deux couvertures

Annexe B

Couvertures statiques

B.1 Stratégie *Stop-Loss Start-Gain*

Le schéma suivant décrit grossièrement le fonctionnement de la stratégie *Stop-Loss Start-Gain* "retardée" pour la réplcation d'un Call Down-and-In.



On distingue les trois régions distinctes de couverture:

- la barrière n'a pas été touchée,
- la barrière a été touchée et le cours du sous-jacent est en-dessous du prix d'exercice actualisé,
- la barrière a été touchée et le cours du sous-jacent est au-dessus du prix d'exercice actualisé.

B.2 Fonction de paiement *ajustée*

On rappelle les paramètres du modèle: $r = 0.05$ et $\sigma = 0.30$. On en déduit que $p = -1/9$.

Le Call Up-and-Out considéré est toujours d'échéance $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ et de barrière $H = 130$.

Le tracé de la fonction de paiement *ajustée* est représenté sur la figure B.1.

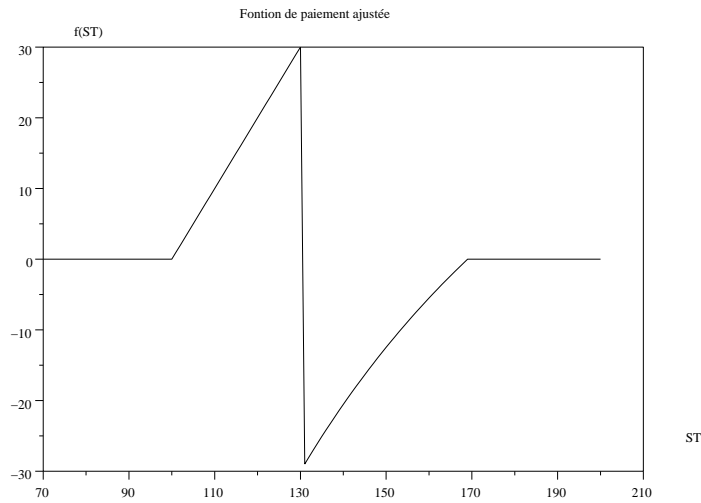
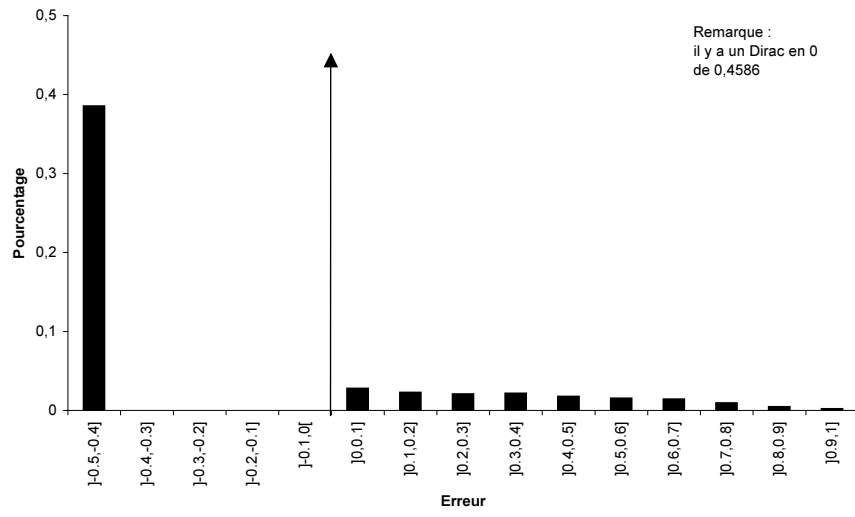


FIG. B.1 – *Fonction de paiement ajustée*

Alors que le graphique respecte bien l'échelle, on constate que la partie non-linéaire se rapproche particulièrement d'un segment de droite.

Les résultats obtenus avec le portefeuille de couverture explicité dans la partie principale apparaissent sur la figure B.2.

FIG. B.2 – *Fonction de densité de l'erreur*

B.3 Réplication de la barrière dans un monde binomial

RAPPEL DU PRINCIPE

Cette méthode utilise le fait que, dans un monde binomial, pour une équation rétrograde donnée, et des conditions aux limites fixées, les valeurs à l'intérieur des ces bornes sont définies de façon unique.

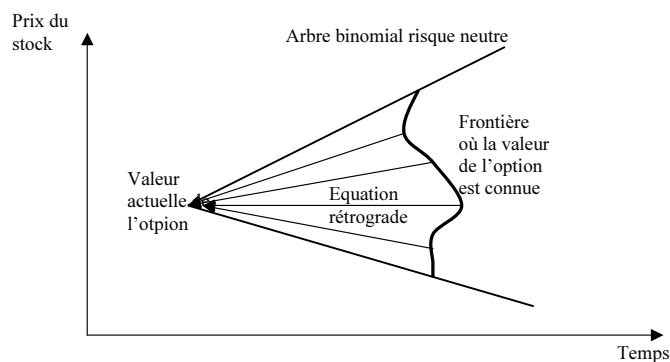


FIG. B.3 – *Méthode binomiale*

APPLICATION À UN EXEMPLE

Les paramètres sont les suivants :

- $r = 0$
- $p = 0.5$
- $T = 5$
- $S_0 = 100$

On obtient l'arbre suivant pour le cours :

Le but est de répliquer une option up and out de strike 70 et de barrière 120.

Le principe est d'annuler de proche en proche les valeurs à la barrière, après avoir répliqué le pay-off à maturité.

L'option barrière est ainsi parfaitement couverte par 3 options vanilles.

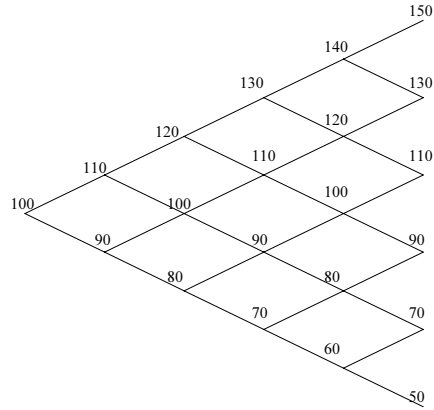


FIG. B.4 – *Arbre du cours*

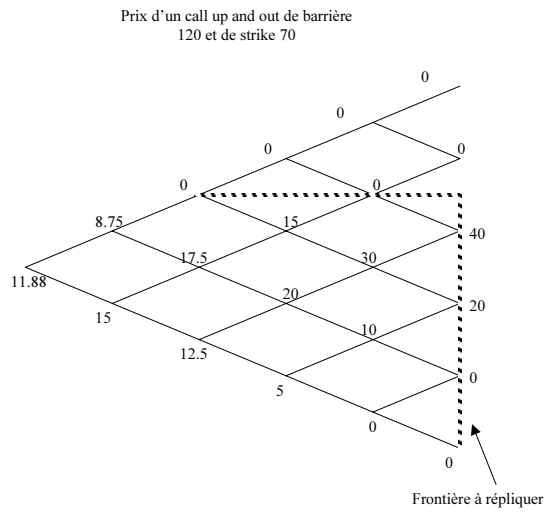


FIG. B.5 – *Arbre de la barrière à couvrir*

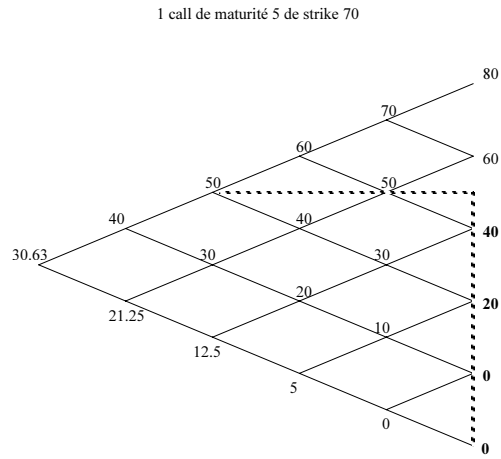


FIG. B.6 – Arbre de la vanille répliquant le pay-off à maturité

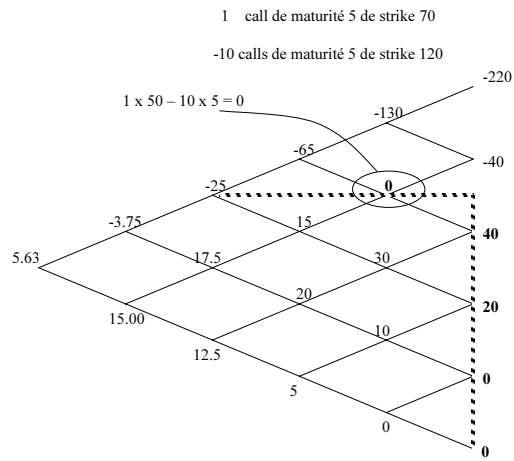


FIG. B.7 – Annulation de la barrière à $T = 4$

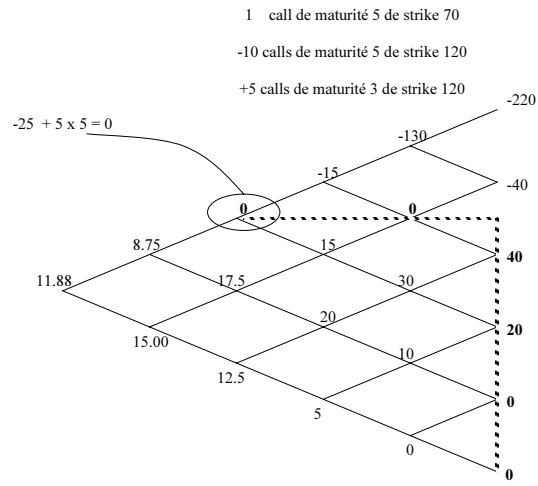


FIG. B.8 – Annulation de la barrière à $T = 3$

B.4 Test de la couverture de réplcation à la barrière

INFLUENCE DU NOMBRE D'OPTIONS

Nous nous sommes, dans un premier temps, intéressé à l'impact de la discrétisation de la barrière sur la qualité de la couverture. Le graphique B.9 présente ainsi le prix du portefeuille de couverture généré en fonction du nombre d'options le constituant.

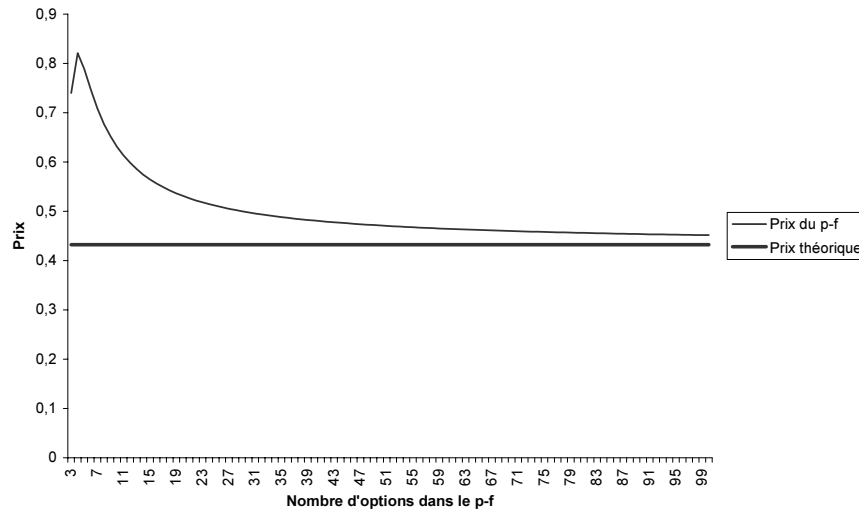


FIG. B.9 – Impact du nombre d'option sur la qualité de la couverture

Ainsi le prix du portefeuille converge vers le prix théorique de l'option barrière, ce qui correspond bien au résultat attendu que la couverture parfaite comporterait un nombre infini d'options. Dans B.10, nous avons plus précisément étudié la valeur d'un portefeuille de couverture type, présenté dans la section suivante, à toutes dates, à la barrière.

Avec un nombre infini d'option la valeur serait uniformément nulle à la barrière, d'où une couverture parfaite. On voit aussi grâce à cette figure que pour un nombre fini de dates d'annulation, une bonne répartition est telle que la fréquence de ces dates augmente en s'approchant de la maturité.

ETUDE D'UNE COUVERTURE

Nous avons étudié une couverture par 12 options vanilles, détaillées dans le tableau ci-dessous, d'un call up and out de maturité 1, de strike 100 et de barrière 130. On se place dans un modèle de Black et Scholes avec $r = 0.05$ et $\sigma = 0.30$. Même si le nombre d'options pour couvrir peut paraître élevé, il

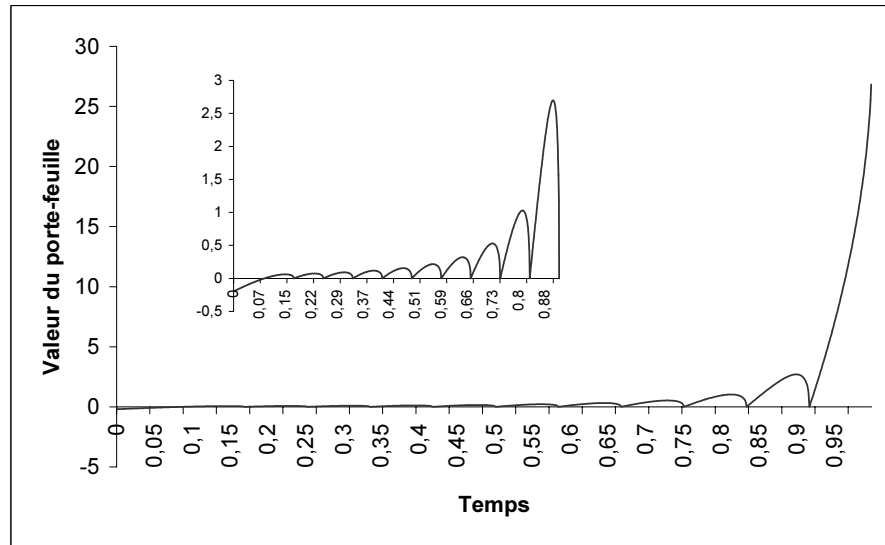


FIG. B.10 – Valeur à la barrière

correspond à une option tous les mois pour couvrir une option de maturité un an, ou une option par trimestre pour une option de maturité trois ans.

Le prix du portefeuille de réplication est de 1,79314, à comparer avec le prix de l'option barrière qui est de 1,50326. La fonction de répartition de l'erreur de couverture est présenté sur la figure B.11.

On remarque que la distribution est très asymétrique, la moyenne est d'ailleurs de 0,30. Cela s'explique par le fait qu'à la barrière le portefeuille surréplique dans la grande majorité des cas (si la barrière est touchée après la première date d'annulation à la barrière), comme on peut le voir sur le graphique B.10. Le Dirac en 0 est dû au fait que la couverture est parfaite quand la barrière n'est pas touchée, ce qui, avec nos paramètres, correspond à 60% des cas. On obtient un indicateur de performance de $IP_{UOC} = 1,17$, qui diminue avec le nombre d'option utilisées pour couvrir.

Remarque : On peut se débarrasser de l'erreur au premier ordre en plaçant 0,3 en cash. On obtient alors une couverture qui vaut le prix théorique de l'option barrière. Mais dans ce cas le Dirac est décalé.

| Strike | Maturité | Quantité |
|--------|----------|-----------|
| 100 | 1 | 1 |
| 130 | 1 | -6.408816 |
| 130 | 0.917 | 2.755506 |
| 130 | 0.834 | 0.919596 |
| 130 | 0.751 | 0.443660 |
| 130 | 0.668 | 0.258427 |
| 130 | 0.585 | 0.168846 |
| 130 | 0.502 | 0.119108 |
| 130 | 0.419 | 0.088720 |
| 130 | 0.336 | 0.068809 |
| 130 | 0.253 | 0.055050 |
| 130 | 0.17 | 0.045136 |

TAB. B.1 – Couverture avec douze options vanilles

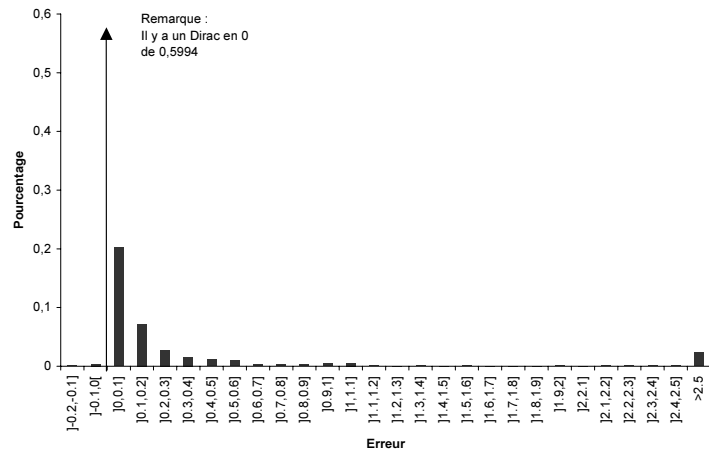


FIG. B.11 – Fonction de densité de l'erreur répliation à la barrière

B.5 Test de la couverture par minimisation de l'erreur quadratique

On couvre le Call Up-and-Out de maturité $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ et de barrière $H = 130$, dans un monde de Black et Scholes où $r = 0.05$ et $\sigma = 0.30$.

Les caractéristiques des options vanilles constituant le portefeuille de couverture, ainsi que les quantités optimales calculées numériquement sont présentées dans le tableau B.2.

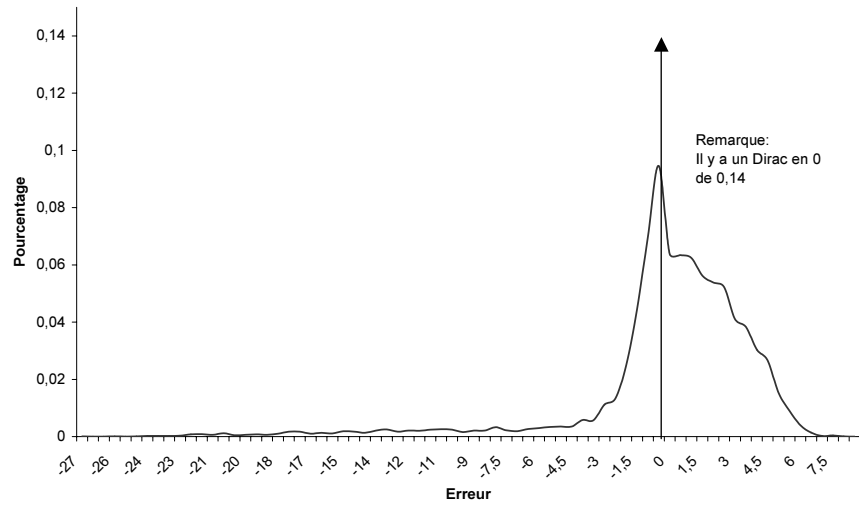
| Strike | Maturité | Quantité |
|--------|----------|-----------|
| 110 | 0.25 | -0.043830 |
| 110 | 0.5 | -0.031613 |
| 80 | 0.75 | -0.085434 |
| 110 | 0.75 | -0.054629 |
| 140 | 0.75 | 0.198894 |
| 80 | 1 | 0.278307 |
| 110 | 1 | -0.341039 |
| 140 | 1 | 0.061604 |

TAB. B.2 – Couverture avec huit options vanilles

Le prix de ce portefeuille de couverture, calculé à partir des formules fermées, est de 1.654. Cette valeur est à comparer au prix du Call Up-and-Out de 1.503.

Le test de cette couverture sur 10000 simulations conduit au tracé de la fonction de densité de l'erreur de réplication sur la figure B.12.

On obtient l'indicateur de performance $IP_{UOC} = 2.52$.

FIG. B.12 – *Fonction de densité de l'erreur moindres carrés*

Annexe C

Tests de robustesse

C.1 Modèles de Dupire et de Kou

Nous allons dans cette section illustrer ces deux modèles par des exemples de courbes et de surface de volatilité implicites obtenues à partir d'eux.

MODÈLE DE DUPIRE

Le graphique C.1 présente un cours obtenu avec $r = 0.05$, $\sigma = 0.30$ et $\delta = 0.2$.

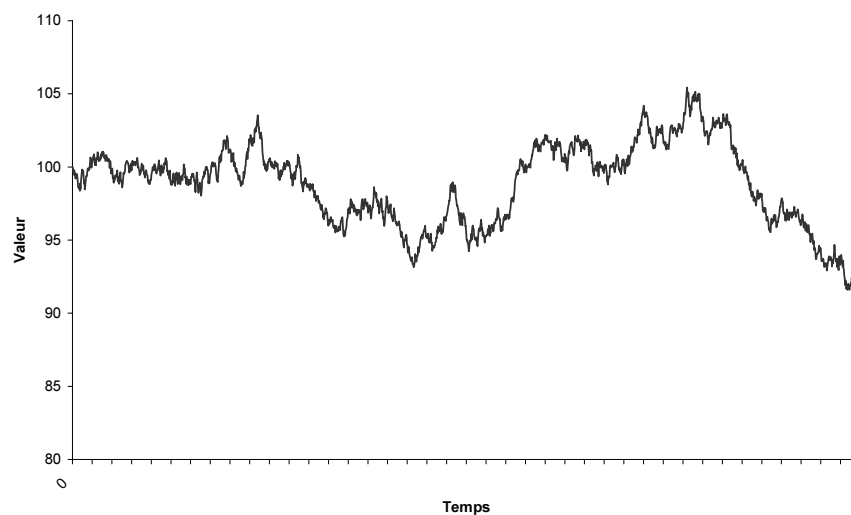


FIG. C.1 – Exemple de cours dans le modèle de Dupire

On voit bien sur ce graphique que la volatilité augmente quand le cours baisse, alors que pour des valeurs hautes de ce dernier elle est moins grande. La figure C.2 montre le smile de volatilité obtenu pour les mêmes paramètres.

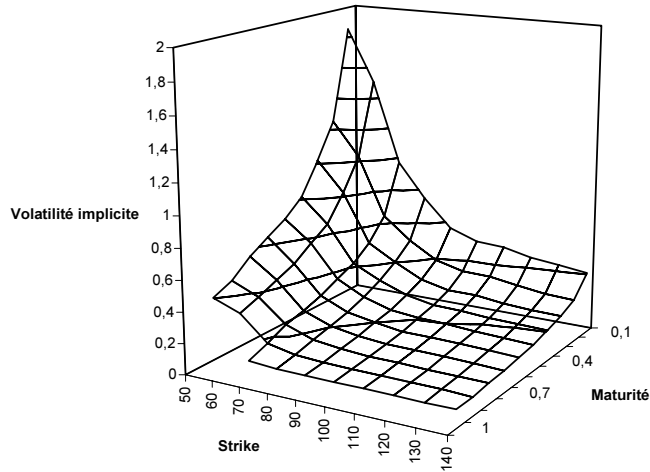


FIG. C.2 – Exemple de nappe de volatilité dans le modèle de Dupire

Ainsi ce modèle permet de simuler des nappes de volatilité beaucoup plus proche de la réalité que le simple modèle de Black et Scholes.

MODÈLE DE KOU

Le graphique C.3 présente un cours obtenu avec $r = 5\%$, $\sigma = 30\%$, $\lambda = 4$, $p = 0.3$, $\eta_1 = 1/0.08$ et $\eta_2 = 1/0.1$.

Pour cet exemple les sauts ont été exagérés, mais cela montre bien ce qu'il est possible de simuler avec ce modèle. L'effet d'*overshoot* est illustré par la figure C.4.

La figure suivante C.5 montre le smile de volatilité obtenu pour les paramètres $r = 0.05$, $\sigma = 0.30$, $p = 0.3$, $\eta_1 = 1/0.05$, $\eta_2 = 1/0.08$, et $\lambda = 3$.

Nous avons, pour finir, testé les performances de l'algorithme 2. Les résultats sont résumés dans les graphiques C.6 et C.7.

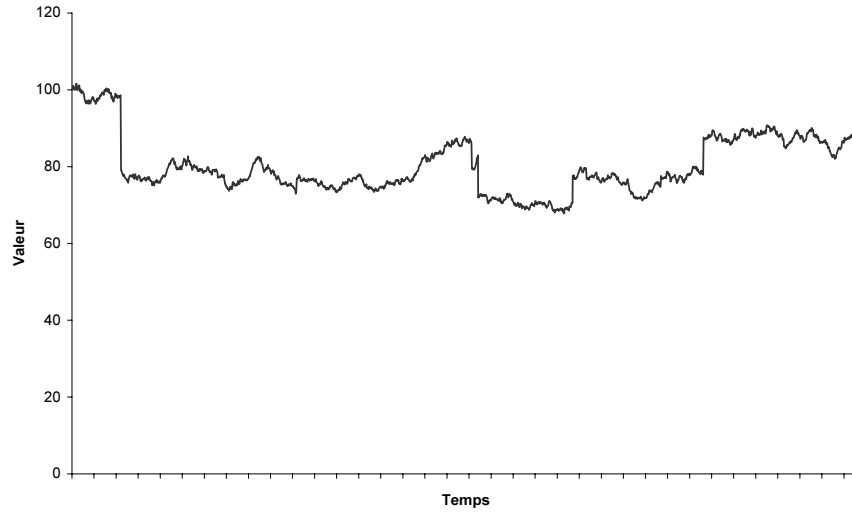


FIG. C.3 – Exemple de cours dans le modèle de Kou

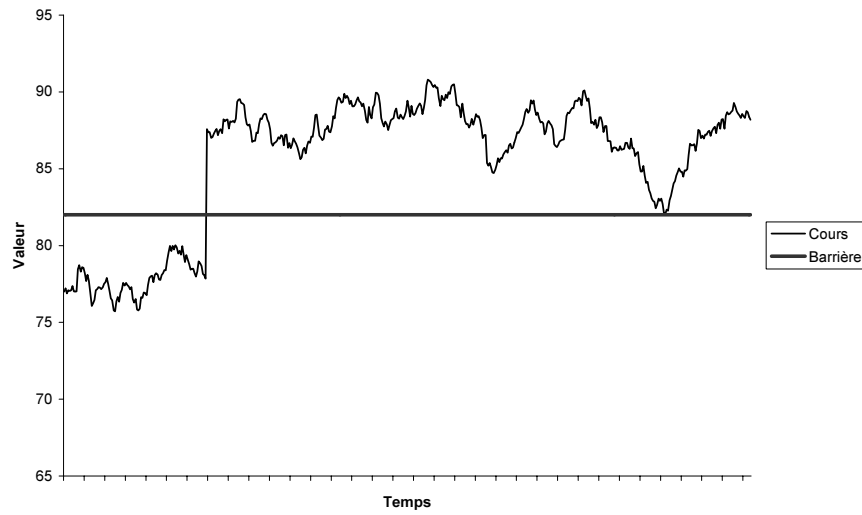


FIG. C.4 – Effet d'overshoot

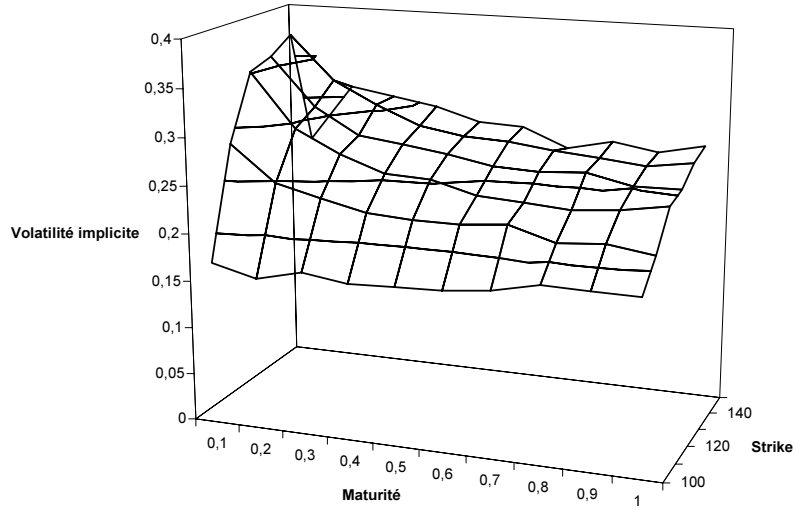


FIG. C.5 – Exemple de nappe de volatilité dans le modèle de Kou

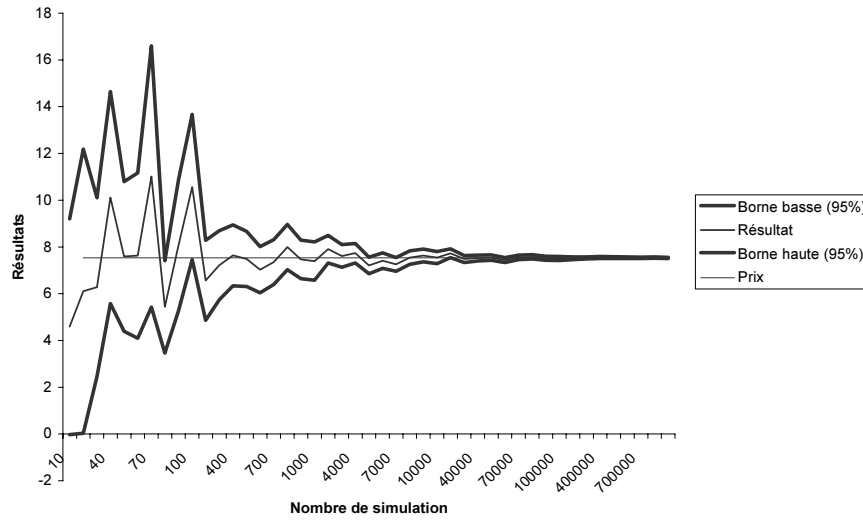


FIG. C.6 – Convergence du pricing par Monte Carlo pour une option vanille

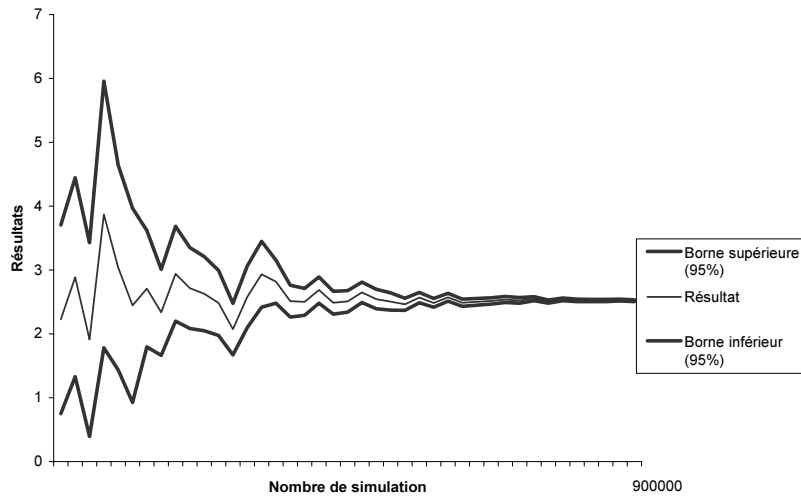


FIG. C.7 – Convergence du pricing par Monte Carlo pour une option barrière

C.2 Comparaison des méthodes

On couvre le Call Up-and-Out de maturité $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ et de barrière $H = 130$, dans un monde de Black et Scholes où $r = 0.05$ et $\sigma = 0.30$.

Les options utilisées pour la couverture sont présentées dans le corps du texte.

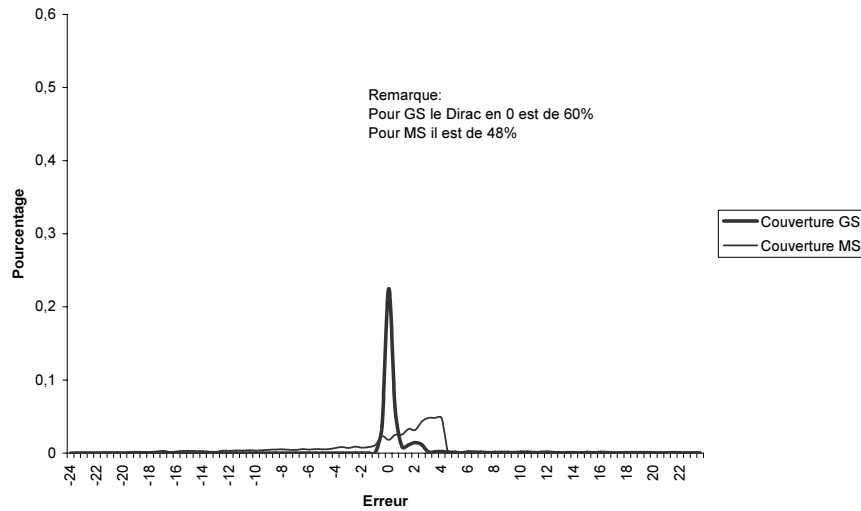


FIG. C.8 – Comparaison des fonctions de densité

On remarque que les deux distributions sont fortement asymétriques, mais dans des directions opposées: la méthode de réplcation à la barrière présente une queue de distribution épaisse dans l'erreur de réplcation du côté positif; c'est l'inverse pour la méthode de minimisation de l'erreur quadratique. Ces constatations se justifient pour *GS* dont le principe a plutôt tendance à surrépliquer, comme l'atteste le graphique B.10. Par contre, pour *MS*, il faut regarder plus en détail les options utilisées pour la couverture.

C.3 Robustesse au changement de modèle

On veut couvrir un Call Up-and-Out de maturité $T = 1$, de prix d'exercice $K = 100$ et de barrière $H = 130$.

Les couvertures sont dans un premier temps déterminées dans un modèle de Black et Scholes où $r = 0.05$ et $\sigma = 0.30$, puis testées dans d'autres modèles.

La figure C.9 montre l'évolution de l'indicateur de performance des couvertures, en fonction du paramètre δ dans le modèle de Dupire.

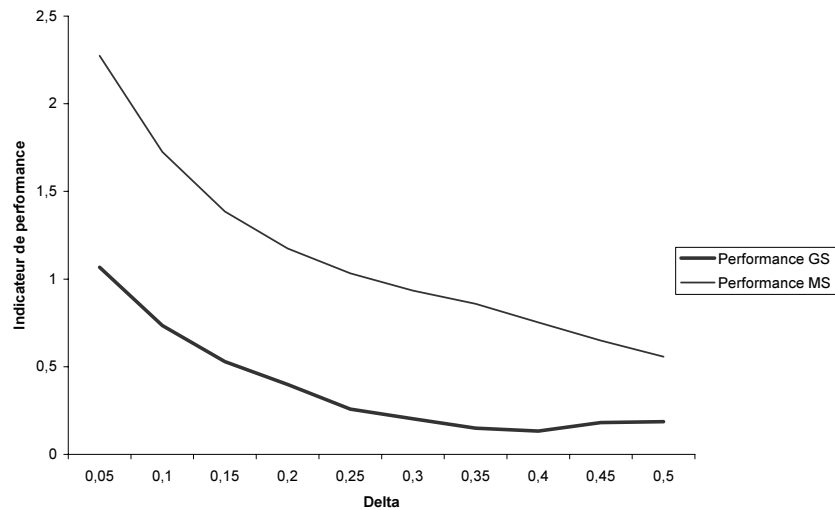


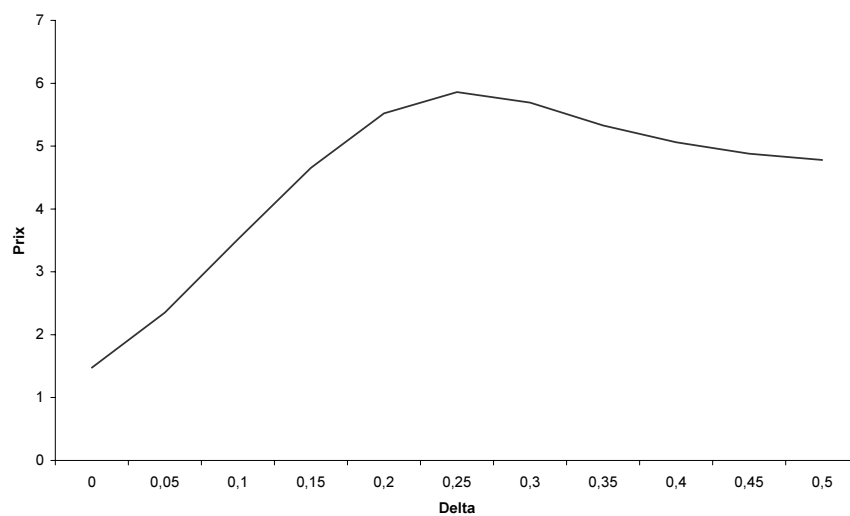
FIG. C.9 – Couverture Black-Scholes dans Dupire

La figure C.10 représente l'évolution du prix du Call Up-and-Out en fonction du paramètre δ dans le modèle de Dupire.

La version *symétrique* du modèle de Kou est basée sur le jeu de paramètres: $p = 0.5$ et $\eta_1 = \eta_2 = 1/0.05$, pour λ variant entre 1 et 10.

La version *asymétrique* du modèle de Kou est basée sur le jeu de paramètres: $p = 0.3$, $\eta_1 = 1/0.05$ et $\eta_2 = 1/0.07$, pour λ variant entre 1 et 10.

Le graphique C.13 présente la distribution de l'erreur de répliation pour une couverture de type "réplication à la barrière" déterminée dans le modèle de Kou symétrique et testée dans ce même modèle.

FIG. C.10 – Sensibilité du prix au paramètre δ

Le graphique C.14 présente la distribution de l'erreur de réplication pour une couverture de type "réplication à la barrière" déterminée dans le modèle de Kou symétrique et testée cette fois dans le modèle de Kou asymétrique.

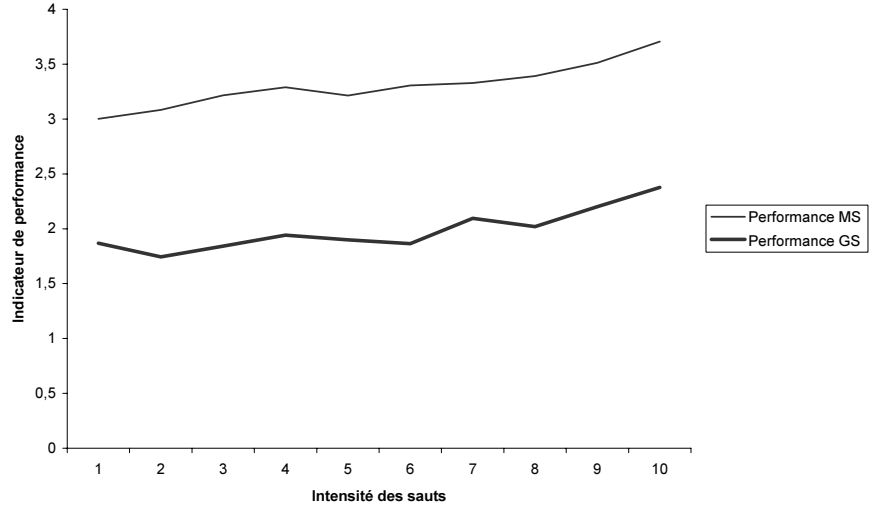


FIG. C.11 – Couverture Black-Scholes dans Kou, version symétrique

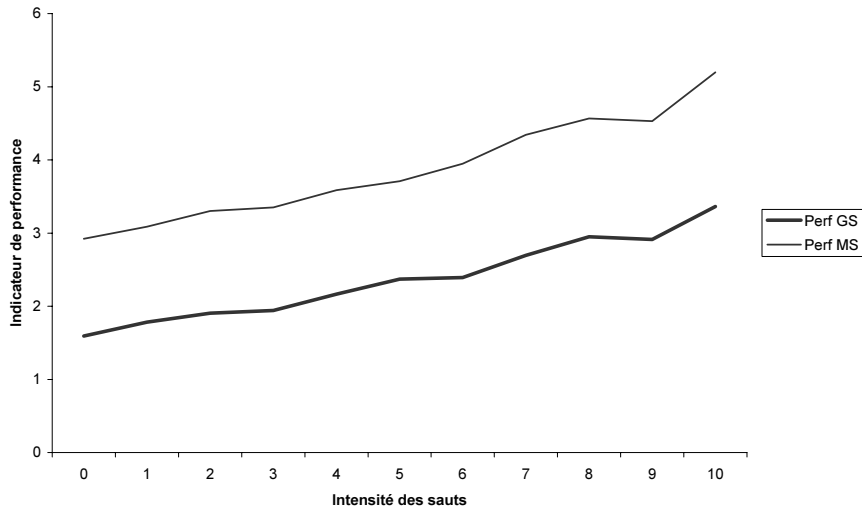


FIG. C.12 – Couverture Black-Scholes dans Kou, version asymétrique

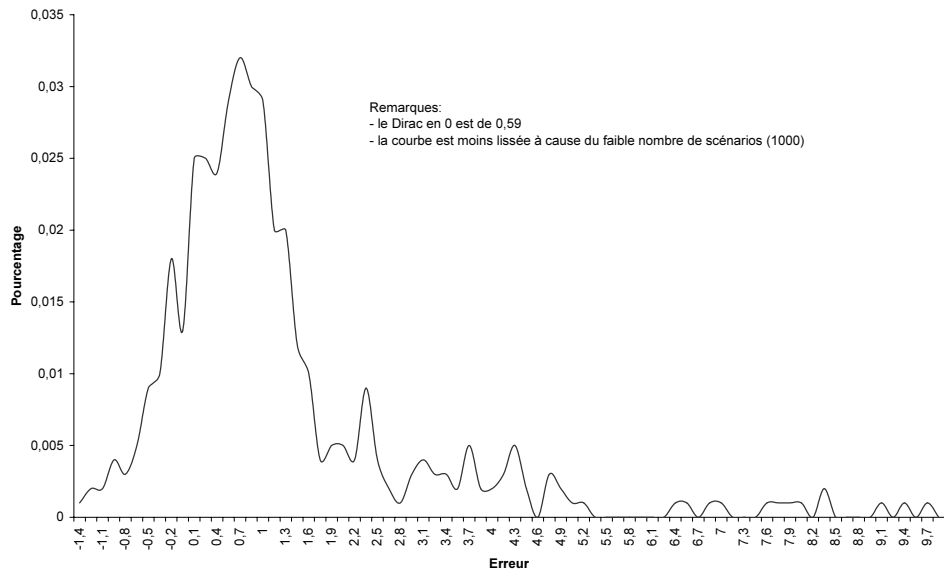


FIG. C.13 – Couverture GS Kou symétrique dans Kou symétrique

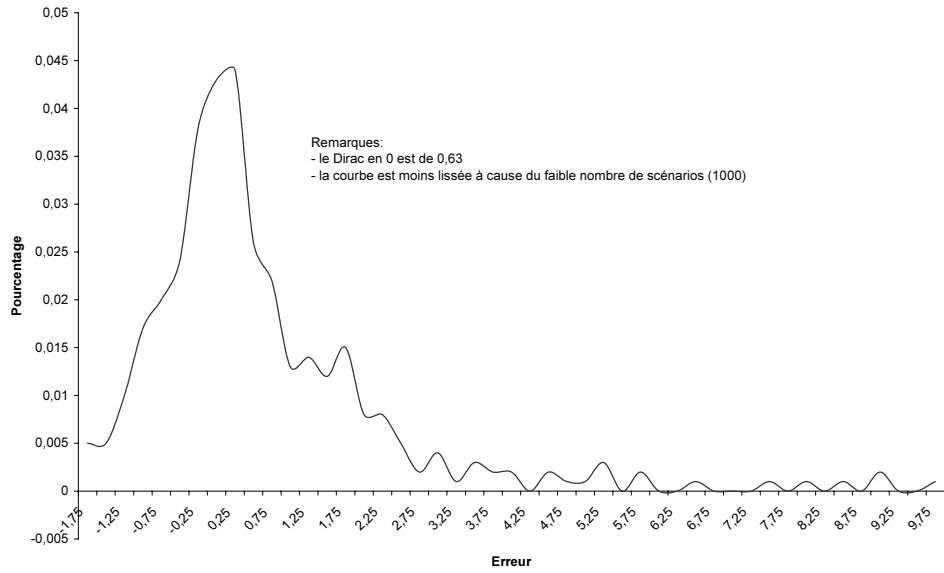


FIG. C.14 – Couverture GS Kou symétrique dans Kou asymétrique

Bibliographie

- [1] ABKEN Peter A. and Saikat NANDI. Options and volatility. *Economic Review*, 1996.
- [2] ANDERSEN Leif B. G. Monte carlo simulation of barrier and lookback options with continuous or high-frequency monitoring of the underlying asset. Preliminary Version, 1996.
- [3] BROWN Haydyn David HOBSON and L.C.G. ROGERS. Robust hedging of barrier options. Technical report, University of Bath, 1998.
- [4] CARR Peter P. and Andrew CHOU. Breaking barriers: Static hedging of barrier securities. Technical report, MIT, 1996.
- [5] CARR Peter P. and Andrew CHOU. Hedging complex barrier options. Technical report, MIT, 1997.
- [6] CARR Peter P. and Katrina ELLIS. Non-standard valuation of barrier options. Technical report, Cornell University, 1994.
- [7] CARR Peter P. and Robert A. JARROW. The stop-loss start-gain paradox and option valuation: A new decomposition into intrinsic and time value. *The Review of Financial Studies*, 3(3):469–492, 1990.
- [8] DERMAN Emanuel Deniz ERGENER and Iraj KANI. Static options replication. Technical report, Goldman Sachs, 1994.
- [9] DUPIRE Bruno. Pricing with a smile. *Risk*, 7(1), 1994.
- [10] DUPONT Dominique Y. Hedging barrier options: Current methods and alternatives. Technical report, Eurandom-Tue, 2001.
- [11] DUPONT Dominique Y. Model risk in static hedging of barrier options. Technical report, Eurandom-Tue, 2001.
- [12] KARATZAS Ioannis and Steven E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, second edition, 1991.
- [13] KOU S. G. and Hui WANG. Option pricing under a double exponential jump diffusion model. Technical report, Columbia University, 2001.
- [14] KOU S. G. and Hui WANG. First passage times of a jump diffusion process. *Advances in Applied Probability*, (2), 2003.
- [15] KURPIEL Adam and Thierry RONCALLI. Option hedging with stochastic volatility. Technical report, FERC Working Paper, 1998.
- [16] LAMBERTON Damien et Bernard LAPEYRE. *Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la Finance*. Ellipses, 1997.

- [17] METWALLY Steve A.K. and Amir F. ATIYA. Using brownian bridge for fast simulation of jump-diffusion processes and barrier options. *The Journal of Derivatives*, 2002.
- [18] PAPAPANTOLEON Antonis and Tino SENGE. Option pricing in a jump diffusion model with double exponential jumps. Technical report, Commerzbank FX, 2002.
- [19] SBUELZ Alessandro. A general treatment of barrier options and semi-static hedges of double barrier options. Technical report, London Business School, 1999.
- [20] TALEB Nassim. *Dynamic Hedging, Managing Vanilla and Exotic Options*. Wiley, 1997.